

Analyse interlaminarer Rissentstehung in einschnittigen Überlappungsklebungen zwischen Laminatfügeteilen

Vom Fachbereich Maschinenbau
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) eingereichte

Dissertation

von

M.Sc. Andreas Talmon l'Armée

aus Darmstadt

Referent:	Prof. Dr.-Ing. habil. Wilfried Becker
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. habil. Chuanzeng Zhang
Tag der Einreichung:	17.01.19
Tag der mündlichen Prüfung:	17.04.19

Darmstadt 2019

Talmon l'Armée, Andreas:

**Analyse interlaminarer Rissentstehung in einschnittigen Überlappungsklebungen
zwischen Laminatfügeteilen**

Dissertation

Andreas Talmon l'Armée
Elisabeth-Selbert-Str. 10A, 64289 Darmstadt

Darmstadt, Technische Universität Darmstadt,
Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUPrints: 2019
URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-86921
Tag der mündlichen Prüfung: 17.04.2019

Veröffentlicht unter CC BY-NC-ND 4.0 International
<https://creativecommons.org/licenses/>

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Strukturmechanik an der Technischen Universität Darmstadt entstanden. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Besonderer Dank geht an Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. W. Becker für seine wohlwollende Unterstützung und Förderung sowie für die gewährten Freiheiten zur wissenschaftlichen Arbeit. Prof. Dr.-Ing. habil. Ch. Zhang danke ich sehr für sein entgegengebrachtes Interesse an der vorliegenden Arbeit und für die bereitwillige Übernahme des Korreferats.

Weiterhin danke ich all meinen Kolleginnen und Kollegen in und außerhalb des Fachgebiets für eine gute Zusammenarbeit und gegenseitige Unterstützung bei den zu bewältigenden Aufgaben. Die zusammen verbrachte Zeit und die fruchtbaren Diskussionen haben sowohl diese Arbeit als auch die gemeinsame Zeit am Fachgebiet maßgeblich bereichert.

Zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken für die stetige Unterstützung und Bestärkung sowie die gewährte Zeit zur Vollendung dieser Arbeit. Besonderer Dank geht an meine Frau Irina für ihre Unterstützung und ihr Durchhaltevermögen in anstrengenden Zeiten.

Kurzfassung

Überlappungsklebung sind aufgrund ihrer vielfältigen Vorteile in der Anwendung eine Verbindungstechnik, die zunehmend an Bedeutung gewinnt. Entsprechend finden sich Klebverbindungen in zahlreichen Anwendungen, insbesondere auf dem Gebiet des Leichtbaus. Häufig gibt es wegen dem komplexen mechanischen Verhalten Bedenken bei der Anwendung in lasttragenden Strukturen. Besonders die auftretenden Schälspannungen führen zu vielfältigen Versagensprozessen. Dies gilt in besonderem Maß für die Anwendung von Klebverbindungen mit Füge teilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden. Deshalb wird im Bereich hoher Schälspannungen oft ein sogenannter "Angstniet" gesetzt, wodurch der Gewichtsvorteil der Klebverbindungen verloren geht. Um die Akzeptanz der Klebverbindungen in lasttragenden Strukturen zu erhöhen, ist es unumgänglich das Versagensverhalten derselbigen gründlich zu untersuchen. Für Füge teilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden muss hierbei insbesondere der Fall interlaminarer Rissbildung verstanden werden.

Zur mechanischen Analyse von Überlappungsklebung können analytische Modelle, semi-analytische Modelle oder rein numerische Modellierungsansätze verwendet werden, um die Feldgrößen zu ermitteln. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein analytisches Modell und ein rein numerisches Finite-Elemente-Modell der einschnittigen Überlappungsklebung diskutiert. Der Fokus liegt in beiden Fällen vornehmlich bei der Bewertung interlaminarer Rissinitiierung. Als Versagenskriterium wird das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der finiten Bruchmechanik implementiert. Zur Validierung werden numerische Vergleichsrechnungen mit Kohäsivzonenmodellierung durchgeführt.

Mit dem analytischen Modell können die benötigten transversalen Spannungsgrößen nicht direkt bestimmt werden, sondern müssen mit einer Rückrechnung aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Durch die Modellierungsannahmen kann mit dem analytischen Modell nur interlaminare Rissinitiierung vom Rand des Füge teils bewertet werden und keine Rissinitiierung im Inneren des Füge teils. Überdies können mit dem analytischen Modell die Schnittkräfte und -momente an den Übergängen des Überlappungsbereichs effizient berechnet werden. Durch die Modellierungsannahmen kann der geometrisch nichtlineare Einfluss in allen Teilbereichen der Überlappungsklebung berücksichtigt werden.

Für eine detaillierte Analyse der Überlappungsklebung wird ein rein numerisches Modell herangezogen. Um die energetischen Größen für das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium berechnen zu können wird zunächst das Rissöffnungsintegral für den Fall der nichtlinearen Elastizität erweitert. Mit der numerischen Analyse ist es möglich auch Rissinitiierung im Inneren der Überlappungsklebung abzubilden. Außerdem kann das Entstehen von Rissmustern bewertet werden. Es wird gezeigt, dass eine punktweise Auswertung des Spannungskriteriums nicht alle im Experiment vorkommenden Risstypen abbilden kann. In der vorliegenden Arbeit wird eine sequentielle Auswertung des Spannungskriteriums vorgeschlagen, indem nachfolgend zur punktweisen Auswertung eine gemittelte Auswertung durchgeführt wird. Somit können alle Risskonfigurationen mit geringem Rechenaufwand abgebildet und eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Versagenslasten erzielt werden.

Abstract

Due to various application advantages adhesive joints are increasingly used as joining technique in many fields of engineering. Hence, adhesive joints can be found in various applications, especially in constructions of light weight structures. In many cases the use in load bearing structures is viewed with concerns due to the complex mechanical behaviour. Particularly, the occurrence of peel stresses leads to various failure modes. This applies most notably for adhesive joints with adherends comprising fibre reinforced plastics. For this reason in many cases a so called "anxiety rivet" is placed in regions with high peel stresses due to which the weight advantage of the adhesive joint is reduced. To increase the acceptance of adhesive joints in load bearing structures it is inevitable to thoroughly investigate the failure mechanisms. For adherends made of fibre reinforced plastics especially interlaminar crack initiation must be understood.

For the mechanical analysis of adhesive joints analytical models, semi-analytical models or numerical modelling approaches can be used to determine the necessary field quantities. In the framework of this work an analytical model and a numerical finite-element-model of a single lap adhesive joint is discussed. The focus lies in both cases on the failure assessment of interlaminar crack initiation. As failure criterion the coupled stress and energy criterion in the framework of finite fracture mechanics is implemented. For validation purposes a numerical reference solution using cohesive zone modelling is conducted.

Using the analytical model, the necessary transverse stress components can not be calculated directly but can be estimated in a post-processing step using the force equilibrium. Due to the modelling assumptions, using the analytical model only interlaminar crack initiation from the outer edges of the adherends can be assessed whereas interlaminar crack initiation inside the adherends can not be modelled. Furthermore, using the analytical model the section forces and moments at the overlap ends can be calculated efficiently. Due to the modelling assumptions the effect of geometric nonlinearity can be covered in all sections of the single lap adhesive joint.

For a more detailed analysis of the adhesive joint a numerical finite-element-model is used. To calculate the energy quantities for the coupled stress and energy criterion first of all the crack opening integral is adapted for the case of nonlinear elasticity. With the numerical analysis it is also possible to assess crack initiation inside the adherends. In addition the occurrence of crack patterns can be assessed. It is shown that a pointwise evaluation of the stress criterion does not allow to model all crack types that occur during experiments. In the presented work it is proposed to conduct an averaged evaluation subsequent to the pointwise evaluation. Doing this all crack configurations can be modelled with low computational costs and good agreement with the experimental failure loads can be achieved.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Aufbau der Arbeit	3
2	Theoretische Grundlagen	5
2.1	Grundlagen der Elastizitätstheorie	6
2.2	Laminattheorien	11
2.3	Festigkeitskriterien	18
2.4	Einführung in die Bruchmechanik	22
2.5	Die Bruchmechanik finiter Risse	27
3	Stand der Forschung	33
3.1	Balken- und Sandwichmodelle für einschnittige Überlappungsklebung	33
3.2	Bestimmung inkrementeller und differentieller Energiefreisetzungsraten	39
3.3	Versagenslastbewertung von Klebfügungen mit FKV-Fügeteilen	41
4	Finite-Elemente-Modellierung der einschnittigen Überlappungsklebung	47
4.1	Voruntersuchungen zur Kohäsivzonenmodellierung	48
4.1.1	Inverse Materialdatenbestimmung	50
4.1.2	Rissmuster	52
4.2	Voruntersuchungen zur finiten Bruchmechanik	53
4.3	Zusammenfassung	56
5	Analytisches Balkenmodell interlaminarer Rissbildung	57
5.1	Balkenmodell mit und ohne Riss	57
5.1.1	Momentengleichgewicht	59
5.1.2	Geschlossen-analytische Lösung	61
5.2	Transversale Spannungen und inkrementelle Energiefreisetzungsraten	64
5.3	Ergebnisse der analytischen Balkenmodellierung	65
5.3.1	Axiale und transversale Spannungen	65
5.3.2	Inkrementelle Energiefreisetzungsraten für interlaminare Risse	67
5.3.3	Schnittgrößen an den Überlappungsenden	69
5.3.4	Einfluss der Randbedingungen	78
5.4	Zusammenfassung	80
6	Rissöffnungsintegral für den finiten Riss im Kontext nichtlinearer Elastizität	81
6.1	Umsetzung im Rahmen der Finite-Elemente-Methode	81
6.2	Mixed-Mode-Verhältnis	86
6.3	Ergebnisse für das Rissöffnungsintegral in der nichtlinearen Elastizität	87
6.3.1	Einfluss geometrisch nichtlinearen Verhaltens	90
6.3.2	Hyperelastisches nichtlineares Materialverhalten	91
6.3.3	Effektive Bruchzähigkeit für eine gemischte Beanspruchung	94

6.3.4	Zusammenfassung	96
7	Finite-Elemente-Modellierung interlaminarer Rissentstehung	99
7.1	Bewertung nicht-monotoner Spannungsfelder	99
7.2	Auswirkung der gemittelten Auswertung auf die Energiefreisetzungsrate . . .	102
7.2.1	Inter- und intralaminare Rissbildung über der Bi-Materialkerbe . . .	102
7.2.2	Inter- und intralaminare Rissbildung vom gegenüberliegenden Rand .	103
7.2.3	Der adhäsive Durchriss	105
7.3	Versagenslasten	106
7.3.1	Experimente von Neto et al.	106
7.3.2	Experimente von Ribeiro et al.	108
7.4	Zusammenfassung	110
8	Zusammenfassung und Ausblick	111
A	Materialdaten	113
B	Konstanten für das analytische Modell	115
B.1	Konstanten für die gelenkige Lagerung	115
B.2	Konstanten für die feste Einspannung	116
	Literaturverzeichnis	119

Nomenklatur

Abkürzungen

aFV	axiales Fügeteilversagen
ADH	Adhäsiv-Versagen
AM	Flächen-Methode (Area Method)
ÄE	äquivalente Einzelschicht
bzw.	beziehungsweise
BK	Benzeggagh und Kenane
ESZ	ebener Spannungszustand
EVZ	ebener Verzerrungszustand
FEM	Finite-Elemente-Methode
KOH	Kohäsiv-Versagen
KZM	Kohäsivzonenmodellierung
FKV	Faser-Kunststoff-Verbunde
KOS	Koordinatensystem
lin.	linear
LM	Linien-Methode (Line Method)
max	maximal
min	minimal
MM	Mehrschicht-Modell
nl.	nichtlinear
LEBM	linear-elastische Bruchmechanik
PL	Potenzgesetz (Power Law)
PM	punktweise Methode (Point Method)
RGR	Riss vom gegenüberliegenden Rand
RM	Rissmittelpunkt
RÖI	Rissöffnungsintegral
RÜK	Riss über dem Kerb
tFV	transversales Fügeteilversagen
VM	Volumen-Methode
z. B.	zum Beispiel

Indizes und Schreibweisen

$\det(\cdot)$	Determinante
$(\cdot)'$	Ableitung nach der einzigen Variablen
$(\cdot)_0$	Mittelebene
$(\cdot)_c$	kritischer Wert
$(\cdot)_E$	an der Einspannung
$(\cdot)_i$	i -te Komponente
$(\cdot)_f$	bei Versagen (failure)
$(\cdot)_{l1}$	Schicht 1 (layer 1)
$(\cdot)_n$	Normalkomponente
$(\cdot)_s$	Tangentialkomponente

$(\cdot)_{\parallel}$	Faserlängsrichtung
$(\cdot)_{\perp}$	quer zur Faserrichtung
$(\cdot)^T$	Transponierte
$(\cdot)^l$	links
$(\cdot)^r$	rechts
$(\cdot)^+$	obere Rissflanke
$(\cdot)^-$	untere Rissflanke
$(\cdot)^{(1)}$	Zustand 1
$(\cdot)_{,x}$	Ableitung nach x
$[\cdot]$	Matrix
$\langle \cdot \rangle$	Macaulay- / Föppel-Klammern
$\overline{(\cdot)}$	gemittelter Wert
$\dot{(\cdot)}$	Ableitung nach der Zeit
$\partial\Omega$	Berandung von Ω
$\Delta(\cdot)$	finiter Schritt
$d(\cdot)$	infinitesimaler Schritt

Lateinische Formelzeichen

a	Risslänge
A	Fläche
$[A_{ij}]$	Scheibenquadrant
b	Breite
$[B_{ij}]$	Koppelquadrant
c	halbe Überlappungslänge
C_{ijkl}	Komponenten des Steifigkeitstensors
$[C_{ij}]$	Steifigkeitsmatrix in Voigt-Notation
d	Abstand
$[D_{ij}]$	Plattenquadrant
\underline{e}_i	Einheitsvektor in i -te Koordinatenrichtung
E	Elastizitätsmodul
$\underline{\underline{E}}$	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
\mathbf{f}	Volumenkräfte
$F(\cdot)$	Festigkeitskriterium
$\underline{\mathbf{F}}$	Schnittkraftvektor
$\underline{\underline{\mathbf{F}}}$	Deformationsgradient
G	Schubmodul
$G(\cdot)$	energetisches Kriterium
\mathcal{G}	differentielle Energiefreisetzungsrate
$\overline{\mathcal{G}}$	inkrementelle Energiefreisetzungsrate
h	Fügeteilhöhe
H	Kraft in horizontaler Richtung
$\underline{\underline{\mathbf{H}}}$	Verschiebungsgradient
\overline{I}	Invarianten bei Drehung um die Faserlängsrichtung
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$	Einheitsmatrix
J	Invariante des Spannungstensors
k	Biegemomentenfaktor
K	Spannungsintensitätsfaktor
K_S	Schubkorrekturfaktor

$\mathcal{K}(\cdot)$	Bruchkriterium
l	Länge / Fügeteillänge
M	Schnittmoment
\underline{n}	Normalenvektor
N	Schnittkraft
p	Knotenkraft
P	äußere Last
Q	Querkraft
$[Q_{ij}]$	reduzierte Steifigkeitsmatrix
r, ϕ	Polarkoordinaten
R	Festigkeit
$[S_{ij}]$	Nachgiebigkeitsmatrix in Voigt-Notation
t	Klebschichtdicke
\underline{t}	Spannungsvektor
T	Tensor 0. Stufe
\underline{T}	Tensor 1. Stufe
$\underline{\underline{T}}$	Tensor 2. Stufe
$[T_{ij}]$	Transformationsmatrix
u	Verschiebung in x -Richtung
\underline{u}	Verschiebungsvektor
U	elastisches Potential
v	Verschiebung in y -Richtung
V	Kraft in vertikaler Richtung
w	Verschiebung in z -Richtung
W	Energie / Arbeit
x, y, z	kartesische Koordinaten (kartesisches Koordinatensystem)
\underline{x}	Ortsvektor in der Momentankonfiguration
\underline{X}	Ortsvektor in der Bezugskonfiguration

Griechische Formelzeichen

α	geometrische Konstante
γ	technische Gleitung
Γ	dissipierte Energie
ε	Dehnung
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Verzerrungstensor
η	viskose Dämpfung
ϑ	Verdrehwinkel einer Einzelschicht
κ	Verkrümmung
λ	Eigenwert
ν	Querkontraktionszahl
Π	Potential / Formänderungsenergie
σ	Normalspannung
$\underline{\underline{\sigma}}$	Spannungstensor
τ	Schubspannung
ϕ	Mixed-Mode-Verhältnis
ψ	Verdrehwinkel in der Laminattheorie
Ω	materielles Kontinuum

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Der Umgang mit endlichen Ressourcen stellt eine große globale Herausforderung dar. Dies beinhaltet sowohl die Energiebereitstellung aber auch in besonderem Maß die Möglichkeit Energie einzusparen. Hierbei nimmt der Leichtbau eine wichtige Rolle ein, weil eine Gewichtsreduktion im Bereich der Mobilität zu enormen Treibstoffeinsparungen führen kann. Neben den positiven Umwelteffekten führt ein optimaler Materialeinsatz zu einem wirtschaftlichen Produkt mit geringen Betriebskosten. Aus diesem Grund sind leichtbautypische Konstruktionstechniken und -materialien vor allem im Gebiet der Luft- und Raumfahrt aber auch im Fahrzeugbau und im Schiffsbau von hohem Interesse. Die wichtigsten klassischen Leichtbauwerkstoffe sind die Metalle Aluminium, Magnesium und Titan aber auch hochfeste Stähle können zum Einsatz kommen. Darüber hinaus wächst die Bedeutung der Faser-Kunststoff-Verbunde (FKV) seit Mitte des letzten Jahrhunderts. Die letztgenannte Werkstoffklasse ist hierbei eine Konstruktion in sich. Durch geeignete Wahl des Lagenaufbaus (Fasertyp, Faserwinkel, Kunststofftyp) können die Eigenschaften von FKV gezielt beeinflusst werden, wobei die Einzellagen aber auch der gesamte Mehrschichtverbund als eine Klebung zwischen Faser- und Matrixmaterial (Kunststoff) angesehen werden kann. Besonderes Interesse erwecken die FKV wegen ihrer hohen gewichtsbezogenen Eigenschaften wie z.B. der spezifischen Steifigkeit und der spezifischen Festigkeit.

Mit dem Aufkommen neuer Konstruktionswerkstoffe stellt sich immer die Frage geeigneter Fügeverfahren. Für Faser-Kunststoff-Verbunde erscheinen hierbei vor allem die Bolzenverbindung, der Schlaufen- und Keilanschluss und die Klebeverbindung zweckmäßig. Die Bolzenverbindung ist ein klassisches Fügeverfahren für metallische Werkstoffe, das aber auch für flächige FKV mit großer Wandstärke geeignet ist. Schlaufen- und Keilanschlüsse sind mit hohem konstruktivem Aufwand verbunden und eignen sich besonders für die Einleitung hoher Kräfte bei engen Platzverhältnissen. Die Klebeverbindung ist vorrangig für flächige und dünnwandige Strukturen geeignet und damit in besonderem Maß für leichtbautypische FKV. Dadurch, dass bei FKV die Lastübertragung durch die Verklebung von Faser- mit Matrixmaterial erfolgt, lässt die Klebeverbindung als für FKV-Bauteile angemessenes Fügeverfahren erscheinen. Des weiteren bleibt das Laminat unbeschädigt, da für eine Klebung keine Bohrungen nötig sind und somit keine Fasern durchtrennt werden müssen. Der Klebstoff ist zusätzlich als Dichtmittel nutzbar und die aerodynamischen Eigenschaften einer geklebten Struktur sind wegen der glatten Oberflächen ausgezeichnet. Allerdings zeigt die Klebeverbindung ein komplexes mechanisches Verhalten. Dies betrifft sowohl die Berechnung der Spannungen und Verzerrungen als auch die Berechnung der Versagenslast. Insbesondere das Versagensverhalten ist Gegenstand der aktuellen Forschung. Im Rahmen wissenschaftlicher Arbeiten ist die einschnittige Überlappungsklebung von maßgebender Bedeutung. Sie ist die

am häufigsten vorkommende Klebverbindung in Luftfahrt- und Automobilstrukturen und ist einfach sowie kostengünstig zu fertigen. Außerdem lässt sich an ihr das gesamte komplexe Tragverhalten einer Klebeverbindung diskutieren.

Faser-Kunststoff-Verbunde weisen im Vergleich zu klassischen isotropen Werkstoffen eine Vielzahl an möglichen Versagensmoden auf. Isotrope spröde Materialien zeigen entsprechend ihrer zwei unabhängigen Elastizitätskonstanten zwei unabhängige Versagensmoden, den Normalbruch und den Schubbruch. Faser-Kunststoff-Verbunde besitzen transversal isotrope Einzelschichten mit fünf unabhängigen Elastizitätskonstanten und weisen demzufolge fünf unabhängige intralaminare Versagensmoden auf. Diese sind Faserbruch unter Zug oder Druck und Zwischenfaserbruch unter Zug, Druck oder Schub. Zusätzlich kann für einen Mehrschichtverbund interlaminares Versagen, Rissbildung zwischen den Einzelschichten, auftreten. Besonders der letztgenannte Versagensmodus führt oft zu katastrophalem Bauteilversagen. Für die Bewertung von Klebverbindungen mit FKV-Fügeteilen müssen neben dem bekannten Adhäsiv-Versagen zwischen Klebstoff und Fügeteil bzw. Kohäsiv-Versagen des Klebstoffes noch zusätzliche Versagensmoden berücksichtigt werden.

Die Bewertung von singulären und inhomogenen Spannungsfeldern, wie sie im Bereich der Bi-Materialkerbe der Klebung vorkommen, stellt hierbei eine besondere Herausforderung dar. Klassische Spanningskriterien sind streng genommen nur für homogene Spannungszustände gültig und deshalb nur eingeschränkt anwendbar. Ebenso können keine energiebasierten bruchmechanischen Kriterien verwendet werden, da sie nur für singuläre Spannungsfelder an Risspitzen Gültigkeit besitzen und einen initialen Riss fordern. An der Bi-Materialkerbe der Klebung sind beide Voraussetzungen nicht erfüllt und somit können weder klassische Festigkeitskriterien noch bruchmechanische Kriterien zu ihrer Bewertung herangezogen werden. Um die Nachteile der klassischen Spannungskriterien und der bruchmechanischen Kriterien aufzuheben wird in dieser Arbeit ein gekoppeltes Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der finiten Bruchmechanik verwendet.

Grundvoraussetzung für die Anwendung von Spannungs- als auch Energiekriterien ist die Ermittlung der Spannungsfelder und der energetischen Größen. Hierzu werden in der vorliegenden Arbeit sowohl analytische als auch numerische Methoden angewandt. Analytische Methoden bilden die Grundlage für effiziente Optimierungsverfahren oder Parameterstudien in der Vorauslegung. Durch die zu Grunde liegenden Modellannahmen können die mechanischen Zusammenhänge mit analytischen Methoden oft nur näherungsweise erfasst werden. Bei der numerischen Finite-Elemente-Methode verhält es sich umgekehrt. Die vollständige Beschreibung der mechanischen Zusammenhänge geht oftmals zu Lasten einer effizienten Berechnung. Wegen der großen Deformationen muss für die einschnittige Überlappungsklebung zusätzlich geometrisch nichtlineares Verhalten modelliert werden, was ebenfalls zu Effizienzeinbußen führt. Zur Auswertung der energetischen Größen kann das aus der linearen Bruchmechanik bekannte Risschließintegral verwendet werden. Wegen der geometrischen Nichtlinearität muss im Vorfeld der Analyse abgeklärt werden, ob das Risschließintegral an die nichtlinearen Zusammenhänge angepasst werden muss oder in seiner bekannten, linearisierten Form verwendet werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird erstmals interlaminares Versagen in einschnittigen Kleb-

verbindungen mithilfe des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der finiten Bruchmechanik, bewertet. Hierzu wird ein analytisches und ein numerisches Modell unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität genutzt. Das analytische Balkenmodell ermöglicht es mit einfacher Modellierung eine Vorhersage für die Versagenslast zu treffen. Außerdem können mit dem Balkenmodell die Schnittgrößen an den Überlappungsenden für Klebungen mit FKV-Fügeteilen mit großer Genauigkeit bestimmt werden. Zur detaillierteren Betrachtung des Versagensverhaltens wird ein numerisches Modell unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität erstellt. In diesem Zusammenhang muss zur Ermittlung der energetischen Größen das Risschließintegral zuerst an die nichtlineare Elastizität adaptiert werden. Durch das nicht-monotone Spannungsfeld in der Umgebung der Bi-Materialkerben können in der Überlappungsklebung interlaminaire Rissmuster entstehen. Dies stellt eine besondere Herausforderung bei der detaillierten numerischen Betrachtung dar.

1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden zunächst die theoretischen Grundlagen der Elastizitätstheorie eingeführt. Ausgehend von den Grundgleichungen werden durch geeignete Verschiebungsannahmen die klassische Laminattheorie, die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung und eine nichtlineare Balkentheorie unter Berücksichtigung mäßiger Drehungen vorgestellt. Darauf folgend werden unterschiedliche Spannungskriterien vorgestellt und die linear elastische Bruchmechanik eingeführt. Darüber hinaus wird das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der finiten Bruchmechanik ausführlich dargestellt

Kapitel 3 stellt den aktuellen Stand der Forschung bezüglich der für diese Arbeit relevanten Teilbereiche dar. Eine wichtige Thematik umfasst analytische Balken- und Sandwichmodelle für einschnittige Überlappungsklebungen. Darüber hinaus besitzen Analysemethoden für die differentielle bzw. inkrementelle Energiefreisetzungsrate hohe Relevanz für die vorliegende Arbeit. Des weiteren wird ein Überblick der Versagenskriterien gegeben, die aktuell für einschnittige Überlappungsklebungen mit FKV-Fügeteilen angewendet werden. Zuletzt wird ein Überblick über experimentelle Befunde bezüglich der in FKV-Fügeteilen vorkommenden Versagensmoden vorgestellt.

In Kapitel 4 werden zwei Finite-Elemente-Modelle der einschnittigen Überlappungsklebung vorgestellt. Eines der Modelle beinhaltet eine Kohäsivzonenmodellierung. Dieses wird als Vergleichsmodell für die Berechnung der Versagenslast verwendet. Das zweite Modell wird zur Auswertung der nötigen Spannungs- und Energiegrößen für das gekoppelte Kriterium in Kapitel 7 verwendet.

In Kapitel 5 wird ein analytisches Balkenmodell für die Analyse von interlaminarer Rissbildung vorgestellt. Das Kräfte- und Momentengleichgewicht wird hierbei am deformierten Balkenelement unter Berücksichtigung mäßiger Verdrehungen aufgestellt. Danach wird die resultierende Spannungslösung und die inkrementelle Energiefreisetzungsrate mit einer numerischen Referenzlösung verglichen. Abschließend werden in diesem Kapitel die resultierenden Schnittgrößen an den Enden der Überlappung untersucht.

In Kapitel 6 wird das Rissöffnungsintegral im Kontext der nichtlinearen Elastizität eingeführt. Werden keine dissipativen Vorgänge wie Reibung oder Plastizität modelliert, ist das Rissöffnungsintegral mit dem Rissschließintegral identisch. Weil das Rissöffnen unter allen Umständen die real stattfindenden Vorgänge beschreibt, wird im Folgenden nur noch das Rissöffnungsintegral behandelt. Angewandt wird das Rissöffnungsintegral letztendlich auf nichtlineare geometrische Zusammenhänge und auf nichtlineares hyperelastisches Material. Außerdem wird eine Betrachtung des Rissöffnungsintegrals in einem globalen festen Koordinatensystem und einem lokalen mitbewegten Koordinatensystem durchgeführt.

In Kapitel 7 wird schlussendlich die Finite-Elemente-Modellierung für die Behandlung interlaminarer Rissbildung vorgestellt. Ein besonderer Fokus wird hierbei auf das Vorgehen beim Auftreten von Rissmustern gelegt. Hierbei werden vor allem die Unterschiede zwischen einer punkweisen und einer gemittelten Auswertung des Spannungskriteriums diskutiert. Zwei mögliche interlaminare Risskonfigurationen und eine Risskonfigurationen in der Klebschicht werden näher untersucht. Abschließend werden die berechneten Versagenslasten mit der Referenzlösung und den experimentellen Werten aus der Literatur verglichen. Weiterhin wird eine Aussage über die Neigung zu interlaminarer Rissbildung getroffen.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die zum Verständnis der Arbeit wesentlichen theoretischen Grundlagen kompakt dargelegt und eine einheitliche Notation eingeführt. Ausgehend von den Grundlagen der Elastizitätstheorie werden die klassische Laminattheorie, die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung und eine geometrisch nichtlineare Balkentheorie mäßiger Drehungen vorgestellt. Weiterhin werden Versagenskriterien beschrieben, die auf Spannungsgrößen und/oder energetischen Größen basieren.

Notation

An dieser Stelle soll zuerst eine einheitliche Notation für alle folgenden Kapitel eingeführt werden. Viele physikalische Größen können mathematisch als Tensoren \mathbf{T} beschrieben werden. Ausgezeichnet sind diese durch ein bestimmtes Transformationsverhalten der Komponenten bei einem Wechsel des Basissystems. Für die vorliegende Arbeit sind Tensoren von 0., 1., 2. und 4. Stufen von Bedeutung. Dieses werden wie folgt notiert:

T	Tensor 0. Stufe
$\underline{\mathbf{T}} = T_i \underline{\mathbf{e}}_i$	Tensor 1. Stufe
$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = T_{ij} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j$	Tensor 2. Stufe
$\underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}} = T_{ijkl} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \otimes \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}_l$	Tensor 4. Stufe.

Tensoren 0. Stufe werden Skalare genannt, wie zum Beispiel die Temperatur oder der Druck. Tensoren 1. Stufe werden Vektoren genannt, wie zum Beispiel Kräfte oder Verschiebungen. Tensoren 2. Stufe sind zum Beispiel der Spannungs- oder auch der Verzerrungstensor. Ein in der Mechanik vorkommender Tensor 4. Stufe ist der Elastizitätstensor. Im Allgemeinen hat ein Tensor n -ter Stufe im dreidimensionalen Raum 3^n Komponenten $T_{ijk\dots}$ mit jeweils zugehörigen geordneten Basisvektor- n -Tupeln $\underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \otimes \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \dots$. Oft wird auf die Komponentenschreibweise zurückgegriffen, wobei davon ausgegangen wird, dass die Komponenten einer vereinbarten Basis zugeordnet sind. In dieser Arbeit werden ausschließlich kartesische Koordinatensysteme verwendet. Des weiteren wird in der Komponentenschreibweise häufig von der Einsteinschen Summationskonvention Gebrauch gemacht. Dabei wird vereinbart, dass über doppelt auftretende Indizes summiert wird.

$$\sigma_{ij} n_j = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2 + \sigma_{i3} n_3$$

Hängen Gleichungen nur von einer unabhängigen Variablen ab, werden in dieser Arbeit Ableitungen mit $(\cdot)'$ bezeichnet. Anderenfalls wird die folgende kompakte Schreibweise für

Ableitungen verwendet:

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = T_{ij,kl}$$

2.1 Grundlagen der Elastizitätstheorie

Im folgenden Abschnitt werden auf Basis der linearen Elastizitätstheorie die nötigen Grundgleichungen zur Ermittlung der Spannungs- und Verschiebungsfelder eingeführt. Ausgehend von den Grundlagen der Elastizitätstheorie werden die klassische Laminattheorie, die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung und eine geometrisch nichtlineare Balkentheorie mäßiger Drehungen vorgestellt. Eine detaillierte Darstellung der folgenden Zusammenhänge findet sich beispielsweise in Becker u. Gross (2002), Gross u. Seelig (2006), Mittelstedt u. Becker (2017) sowie Reddy (2003) und Sadd (2009).

Grundgleichungen

Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie umfassen die *Gleichgewichtsbedingungen*, die *kinematischen Beziehungen* und die *konstitutiven Gleichungen*. Sie gelten für jedes materielle Kontinuum Ω . Dieser Satz an Gleichungen wird auch als Feldgleichungen bezeichnet und macht folgende Aussage über die ihnen zu Grunde liegenden Feldgrößen:

- Die *Gleichgewichtsbedingungen* stellen in statischen Problemstellungen die Forderung nach im Gleichgewicht stehender Kraftgrößen dar.
- Die *kinematischen Beziehungen* verknüpfen Verschiebungs- und Deformationsgrößen.
- Die *konstitutiven Gleichungen* geben schließlich einen Zusammenhang zwischen den Deformationsgrößen und den inneren Kraftgrößen an.

Zusammen mit den Randbedingungen, Spannungsrandbedingungen auf Teilrand $\partial\Omega_t$ und Verschiebungsrandbedingungen auf Teilrand $\partial\Omega_u$, ist damit ein eindeutig lösbares Randwertproblem für die zugehörigen Feldgrößen \underline{u} , $\underline{\varepsilon}$ und $\underline{\sigma}$ (Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen) gegeben. Im folgenden werden die Grundgleichungen in der oben aufgeführten Reihenfolge eingeführt.

Gleichgewichtsbedingungen

Durch die Belastung eines Körpers werden im Inneren Schnittkräfte \underline{F} hervorgerufen. Wird nun die Schnittkraft $\Delta \underline{F}$ auf einer beliebigen infinitesimalen Schnittfläche ΔA mit zugehörigem Normalenvektor \underline{n} betrachtet, ergibt sich für den Grenzübergang $\Delta A \rightarrow 0$ die Definition des Spannungsvektors

$$\underline{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{F}}{\Delta A}. \quad (2.1)$$

Werden drei senkrecht zueinander stehende Schnitte in einem materiellen Punkt ausgeführt, ist dort der Spannungszustand eindeutig durch die drei Spannungsvektoren $\underline{t}_1, \underline{t}_2$ und \underline{t}_3 charakterisiert. Dies führt auf die Definition des CAUCHYschen Spannungstensors

$$\underline{\underline{\sigma}} = [\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{t}_3]^T = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (2.2)$$

wobei $(\cdot)^T$ für die Transponierte steht. Wegen der Erfüllung des lokalen Momentengleichgewichts muss

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

gelten, so dass nur sechs unabhängige Spannungskomponenten existieren. Ist der Spannungstensor bekannt, kann mit der CAUCHYschen Formel der entsprechende Spannungsvektor unter einem beliebigen Schnitt mit der Schnittnormalen \underline{n} berechnet werden:

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad \text{bzw.} \quad t_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (2.3)$$

Für jeden Spannungszustand gibt es ausgezeichnete Schnittrichtungen, in denen keine Schubspannungen auftreten. Diese Richtungen werden als Hauptachsenrichtungen bezeichnet. Der Spannungsvektor kann unter diesen Schnitten mit dem skalaren Wert σ ausgedrückt werden $\underline{t} = \sigma \underline{n}$. Durch Gleichsetzen mit der CAUCHYschen Formel ergibt sich

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma \underline{n} \quad \text{bzw.} \quad (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{n} = 0.$$

Nichttriviale Lösungen für die Schnittrichtungen \underline{n} existieren, falls die Koeffizientendeterminante verschwindet

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) = 0 \quad (2.4)$$

Dies führt zur charakteristischen Gleichung zur Bestimmung der Hauptspannungen σ

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0. \quad (2.5)$$

Hierbei sind J_1, J_2 und J_3 die Invarianten des Spannungstensors:

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.6)$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

Die drei reellen Lösungen der charakteristischen Gleichung $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ werden als Hauptspannungen bezeichnet, die zugehörigen Schnittrichtungen $\underline{n}_I, \underline{n}_{II}$ und \underline{n}_{III} als Hauptrichtungen.

Die Gleichgewichtsbedingungen können durch Kräftegleichgewicht am infinitesimalen Volumenelement hergeleitet werden. Sie lauten unter Berücksichtigung der Volumenkräfte \underline{f} , formuliert in Komponentenschreibweise:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0.$$

Diese lokale Formulierung des Kräftegleichgewichts ist im Allgemeinen statisch unbestimmt, da sie sechs unbekannte Spannungen enthält aber nur drei Differentialgleichungen zur Verfügung stellt. Deshalb müssen weitere physikalische Beziehungen zur Lösung des allgemeinen Randwertproblems hinzugefügt werden.

In vielen technisch relevanten Fällen lässt sich eine allgemein dreidimensionale Problemstellung auf zwei Raumdimensionen verringern. Die Annahme, dass alle Spannungen in einer Raumdimension vernachlässigbar klein sind, führt auf die Gleichungen des ebenen Spannungszustands (ESZ). Dieser gilt für ein Bauteil mit geringer Ausdehnung in x_3 -Richtung, dass nur durch Kräfte in der x_1, x_2 -Ebene belastet ist. Die Deckflächen sind somit spannungsfrei und aufgrund der geringen Dicke folgt die Annahme, dass auch im Inneren die Spannungskomponenten in x_3 -Richtung vernachlässigt werden können. Somit gilt für den ebenen Spannungszustand:

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (2.9)$$

Diese Annahme führt zu einer um eine Raumdimension reduzierten Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen.

Kinematische Beziehungen

Die Deformation eines Körpers unter einer äußeren Belastung wird durch die Verschiebung der zugehörigen materiellen Punkte beschrieben. Die materiellen Punkte seien hierzu in der undeformierten Ausgangslage (Bezugskonfiguration) mit dem Ortsvektor $\underline{\mathbf{X}}$ beschrieben und im deformierten Zustand (Momentankonfiguration) mit dem Ortsvektor $\underline{\mathbf{x}}$. Da $\underline{\mathbf{x}}$ und $\underline{\mathbf{X}}$ den selben materiellen Punkt beschreiben gilt $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}(\underline{\mathbf{X}}, t)$ wobei t eine mögliche Abhängigkeit von der Zeit kennzeichnet. Die Verschiebung der materiellen Punkte kann also durch $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}$ ausgedrückt werden und zeigt von der Bezugs- zur Momentankonfiguration. Die drei Komponenten des Verschiebungsvektors stellen weitere unbekannte Größen im elastomechanischen Randwertproblem dar. Da die Verschiebung der materiellen Punkte kein Maß für die Beanspruchung sein kann¹, muss eine weitere Größe eingeführt werden. Die Beanspruchung eines Materials kann über die relative Verschiebung zweier benachbarter Punkte, einem infinitesimalen Linienelement, beschrieben werden. Hierzu wird ein unverformtes Linienelement aus dem Ausgangszustand $d\underline{\mathbf{X}}$ betrachtet. Dieses geht bei Deformation in $d\underline{\mathbf{x}}$ über. Folgender Zusammenhang beschreibt die Abbildung von $d\underline{\mathbf{X}}$ auf $d\underline{\mathbf{x}}$:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j. \quad \text{bzw.} \quad d\underline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot d\underline{\mathbf{X}} \quad (2.10)$$

Der hier auftretende Tensor 2. Stufe $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ entspricht der Ableitung der Ortskoordinaten x_i nach den materiellen Koordinaten X_j und wird als Deformationsgradient bezeichnet. Die relative Verschiebungsänderung zweier benachbarter Punkte lässt sich schließlich mit dem Verschiebungsgradient $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$ ausdrücken als:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j = H_{ij} dX_j \quad \text{bzw.} \quad d\underline{\mathbf{u}} = d\underline{\mathbf{x}} - d\underline{\mathbf{X}} = (\underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \cdot d\underline{\mathbf{X}} = \underline{\underline{\mathbf{H}}} \cdot d\underline{\mathbf{X}} \quad (2.11)$$

¹Bei einer Starrkörperverschiebung können sehr große Verschiebungen ohne jegliche Deformationen auftreten. Folglich ist der Körper in diesem Fall trotz großer Verschiebungen unbeanspruch.

Um die Deformation eines Materials zu beschreiben, finden sich in der Literatur eine Reihe verschiedener Verzerrungstensoren die auf dem Deformationsgradient bzw. Verschiebungsgradienten basieren. Zur Beschreibung geometrisch nichtlinearen Verhaltens oder großer elastischer Deformationen wird häufig der GREEN-LAGRANGESche-Verzerrungstensor $\underline{\underline{E}}$ mit der nachfolgenden Definition verwendet:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{H}}^T + \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}} \right). \quad (2.12)$$

In der linearen Theorie werden die Komponenten des Verschiebungsgradienten $H_{ij} \ll 1$ als klein vorausgesetzt, so dass bei der Formulierung der Verzerrungsmaße alle quadratischen Glieder vernachlässigt werden können. Die Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors ε_{ij} sind demzufolge definiert als:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.13)$$

Durch sie sind sechs Gleichungen gegeben, die einen Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungen herstellen. Der linearisierte Verzerrungstensor entspricht dem symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten

$$H_{ij} = u_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}, \quad (2.14)$$

weshalb

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad (2.15)$$

Wie beim Spannungstensor ergeben sich hieraus sechs unabhängige Komponenten des Verzerrungstensors. Der antisymmetrische Anteil entspricht einer infinitesimalen Starrkörperdrehung, weshalb er von untergeordnetem Interesse ist. Für den infinitesimalen Verzerrungstensor gelten als symmetrischen Tensor 2. Stufe die gleichen Transformationsbeziehungen wie für den Spannungstensor.

Ebenso wie für den Spannungszustand lässt sich analog ein ebener Verzerrungszustand (EVZ) einführen. Ein EVZ liegt vor, falls die Verschiebungskomponente u_3 identisch zu Null gesetzt werden kann und die übrigen Verschiebungskomponenten unabhängig von der x_3 -Koordinate sind. Unter diesen Annahmen gilt für den ebenen Verzerrungszustand:

$$\varepsilon_{33} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0. \quad (2.16)$$

Der ebene Verzerrungszustand tritt in Bauteilen auf, deren geometrische Form und äußere Belastung sich in x_3 -Richtung nicht ändert und wenn zusätzlich die Verschiebung u_3 durch eine Lagerung verhindert ist. Näherungsweise kann er für Bauteile mit einer großen Ausdehnung in x_3 -Richtung angenommen werden.

Konstitutive Beziehungen

Bisher wurden die drei Gleichungen der Gleichgewichtsbedingung, mit den sechs unbekannten Spannungskomponenten, und die sechs kinematischen Gleichungen, mit sechs unbekannten Verzerrungskomponenten und drei unbekannten Verschiebungskomponenten eingeführt. Zur Lösung des Randwertproblems fehlen sechs weitere Gleichungen. Diese werden durch das

Materialgesetz zur Verfügung gestellt. Das Materialgesetz stellt eine Verbindung der kinematischen Größen mit den Kraftgrößen her. Für ideal-elastisches Materialverhalten ist der Spannungszustand eindeutig durch den Deformationszustand festgelegt und die Spannungen und Dehnungen können somit auf ein elastisches Potential U , die sogenannte Formänderungsenergiedichte, zurückgeführt werden. Für das totale Differential dU dieser Zustandsgröße gilt:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (2.17)$$

Wird das Materialgesetz weiter auf linear-elastisches Materialverhalten eingeschränkt, ergibt sich folgende Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{mit} \quad C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij}. \quad (2.18)$$

Dieses Materialgesetz wird auch als HOOKEsches Gesetz bezeichnet und ist für anisotropes Materialverhalten gültig. Der Elastizitätstensor 4. Stufe $C_{ijkl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$ hat 81 Komponenten ($i, j, k, l=1, 2, 3$). Die Anzahl unabhängiger Komponenten reduziert sich durch geltende Symmetrien. In Gleichung (2.18) ist bereits die erste Symmetrie gezeigt. Sie ergibt sich aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen des elastischen Potentials, nach dem Satz von SCHWARZ. Daneben existieren zwei weitere Symmetrien, die sich aus den jeweiligen Symmetrien des Spannungs- und Verzerrungstensors ergeben:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (2.19)$$

Damit reduziert sich die Anzahl unabhängiger Komponenten auf 21 Materialkonstanten. Die sechs unabhängigen Komponenten des Spannungstensors $\underline{\sigma}$ bzw. des Verzerrungstensors $\underline{\varepsilon}$ können als Spaltenmatrix für die Spannungen $[\sigma_i]$ bzw. Verzerrungen $[\varepsilon_i]$ aufgeschrieben werden. Ebenso können die Materialkonstanten in einer (6×6) -Matrix $[C_{ij}]$ angeordnet werden. Werden weiterhin die Tensorkomponenten $\varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}$ durch die technischen Gleitungen $\gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}$ ersetzt

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \quad , \quad \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \quad , \quad \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}, \quad (2.20)$$

ergibt sich das anisotrope Materialgesetz in VOIGT-Notation

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & \text{sym.} & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad [\sigma_i] = [C_{ij}] [\varepsilon_j]. \quad (2.21)$$

Im Folgenden wird hauptsächlich die VOIGT-Notation verwendet. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass der Tensor-Charakter der beteiligten Größen in VOIGT-Notation verloren geht. Die Nachgiebigkeitsmatrix $[S_{ij}]$ kann ebenfalls in VOIGT-Notation aufgeschrieben werden, sie ergibt sich aus der Inversen der Steifigkeitsmatrix $[C_{ij}]$. So kann das Materialgesetz alternativ geschrieben werden als:

$$[\varepsilon_i] = [C_{ij}]^{-1} [\sigma_j] = [S_{ij}] [\sigma_j] \quad (2.22)$$

Weist ein Material zusätzliche Materialsymmetrien auf, kann die Anzahl unabhängiger Elastizitätsparameter weiter reduziert werden.

Monoklines Materialverhalten ergibt sich bei Vorhandensein einer Symmetrieebene. Dieses Materialverhalten kann mit 13 unabhängigen Materialkonstanten beschrieben werden. Bei orthotropem Materialverhalten weist ein Material drei senkrecht zueinander stehende Symmetrieebenen auf. Stehen die Symmetrieebenen senkrecht auf den Achsen eines kartesischen x_1, x_2, x_3 -Koordinatensystems, kann das Materialgesetz mit den 12 Ingenieurskonstanten E_1, E_2, E_3 (Elastizitätsmoduli), G_{12}, G_{13}, G_{23} (Schubmoduli) und $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ (Querkontraktionszahlen) folgendermaßen angegeben werden:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Durch die Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix müssen die folgenden Reziprozitätsrelationen zwischen den Ingenieurskonstanten gelten

$$\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1 \quad , \quad \nu_{13}E_3 = \nu_{31}E_1 \quad , \quad \nu_{23}E_3 = \nu_{32}E_2, \quad (2.24)$$

so dass neun unabhängige Materialkonstanten ausreichen um orthotropes Materialverhalten vollständig zu beschreiben. Besonders relevant für die Beschreibung von Faser-Kunststoff-Verbunden ist transversal isotropes Materialverhalten. Es tritt auf, falls sich ein orthotropes Material invariant gegenüber einer beliebigen Drehung um eine Achse verhält. Diese Achse ist für eine unidirektionale Einzelschicht durch die Faserrichtung gegeben, welche entlang der x_1 -Achse liegt. Die Ebene senkrecht zur x_1 -Achse wird deshalb auch isotrope Ebene genannt. Für transversal isotropes Materialverhalten ergeben sich zusätzliche Beziehungen zwischen den Materialkonstanten,

$$E_2 = E_3 \quad , \quad G_{12} = G_{13} \quad , \quad \nu_{12} = \nu_{13} \quad , \quad G_{23} = \frac{E_3}{2(1 + \nu_{23})}, \quad (2.25)$$

so dass fünf unabhängige Elastizitätskonstanten zur Beschreibung ausreichen. Ist das Materialverhalten invariant gegenüber einer beliebigen Rotation des Bezugssystems, genügen zwei Elastizitätskonstanten zu dessen Beschreibung, der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν . Der Schubmodul G kann mit derselben Beziehung berechnet werden wie in der isotropen Ebene des transversal isotropen Materials:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.26)$$

2.2 Laminattheorien

Für viele technische Anwendungen ist es zweckmäßig Flächentragwerke zu verwenden, die aus mehreren Einzelschichten aufgebaut sind. Diese werden als Lamine oder Mehrschichtenverbunde bezeichnet, wobei als Einzelschichten häufig unidirektionale Schichten mit transversal isotropem Materialverhalten eingesetzt werden. Zur Beschreibung der Mehrschichtverbunde

finden sich in der Literatur, siehe Reddy (2003, 2004), eine große Anzahl an Theorien. Im folgenden werden die klassische Laminattheorie, die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung und eine geometrisch nichtlineare Balkentheorie mäßiger Drehungen vorgestellt. Diese ergeben durch entsprechende Verschiebungsannahmen aus den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. Zunächst wird aber das zugrunde liegende Konstitutivverhalten der Lamineinzelschicht vorgestellt.

Konstitutivgesetz der Lamineinzelschicht

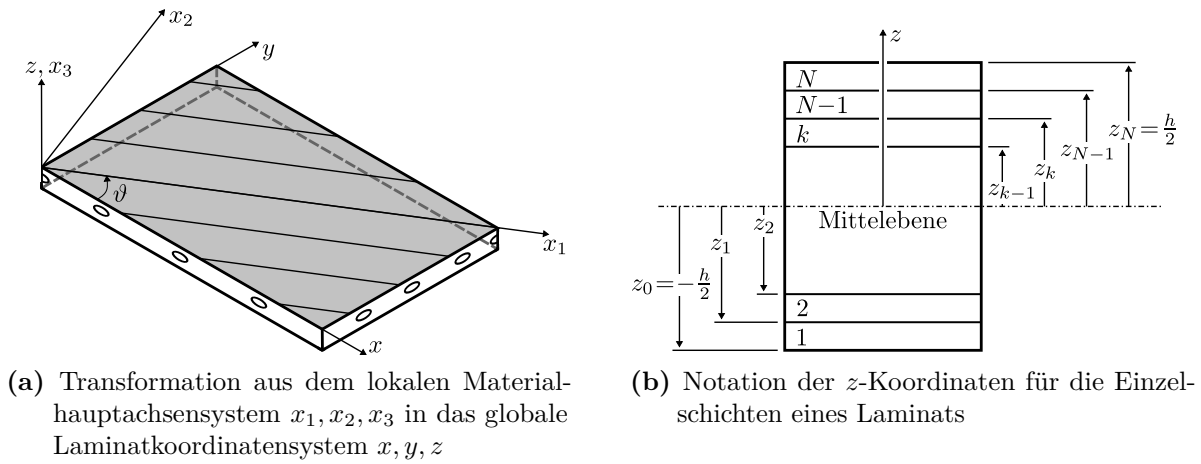


Abbildung 2.1: Zusammenhänge zwischen Materialkoordinaten und Laminatkoordinaten

Bei der Konstruktion von Mehrschichtverbunden werden häufig unidirektionale Einzelschichten mit transversal isotropem Materialverhalten eingesetzt. Die Lage einer einzelnen Schicht kann über die z -Koordinate ihrer Unter- und Oberseite und den Verdrehwinkel ϑ , wie in Abbildung 2.1 gezeigt, angegeben werden. Zur Beschreibung der Einzelschichten werden zwei unterschiedliche, kartesische Koordinatensysteme verwendet: Das x_1, x_2, x_3 -Materialkoordinatensystem und das x, y, z -Laminatkoordinatensystem. Hierbei verlaufen die x_3 - und die z -Achse kollinear. Außerdem ergibt sich das Materialkoordinatensystem aus dem Laminatkoordinatensystem durch eine mathematisch positive Verdrehung um die z -Achse mit dem Winkel ϑ .

Für die Berechnung von Faser-Kunststoff-Verbunden wird im allgemeinen ein ebener Spannungszustand angenommen. Das Materialgesetz für ein transversal isotropes Material, dessen isotrope Ebene mit der x_2, x_3 -Ebene zusammenfällt, ergibt sich unter den Annahmen des ESZ zu:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad [\sigma_i] = [Q_{ij}][\varepsilon_j] \quad (2.27)$$

Die Komponenten der reduzierten Steifigkeitsmatrix lassen sich hierbei wie folgt aus den Ingenieurskonstanten berechnen:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (2.28)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.29)$$

Neben der Beschreibung im x_1, x_2, x_3 -Materialkoordinatensystem ist für die Behandlung von Faser-Kunststoff-Verbunden die Beschreibung in einem um den Winkel ϑ gedrehten x, y, z -Laminatkoordinatensystem von Bedeutung. Aus diesem Grund wird zunächst die Transformation der Spannungen und der Verzerrungen zwischen Material- und Laminatkoordinatensystem eingeführt. Sind die Komponenten des Spannungstensors im Materialkoordinatensystem gegeben, notiert als Spaltenmatrix $[\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T$, können sie mit folgenden Beziehungen in das um den Winkel ϑ gedrehte Laminatkoordinatensystem zu $[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}]^T$ transformiert werden

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin^2 \vartheta & -2 \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \sin^2 \vartheta & \cos^2 \vartheta & 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \vartheta & \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = [T_{ij}] \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Für den Verzerrungstensors ergibt sich eine ähnliche Beziehung zwischen den Komponenten im Laminatkoordinatensystem, $[\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}]^T$, und den Komponenten im Materialkoordinatensystem, $[\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}]^T$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [T_{ij}]^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (2.30) und (2.31) in Gleichung (2.27) ergibt sich das Materialverhalten der Einzelschicht beschrieben im Laminatkoordinatensystem durch folgende Transformationsbeziehung

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [T_{ij}][Q_{ij}][T_{ij}]^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\bar{Q}_{ij}] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

wobei \bar{Q}_{ij} die Einträge der Steifigkeitsmatrix bezüglich des Laminatkoordinatensystems darstellen. Außer für die Winkel $\vartheta=0^\circ$ und $\vartheta=90^\circ$ ist die Steifigkeitsmatrix $[\bar{Q}_{ij}]$ für transversal isotropes Material voll besetzt mit $\bar{Q}_{16} \neq 0$ und $\bar{Q}_{26} \neq 0$.

Klassische Laminattheorie

Die einfachste mechanische Beschreibung eines Mehrschichtenverbundes kann durch die klassische Laminattheorie erfolgen. Sie eignet sich zur Erfassung des Verhaltens hinreichend dünner Lamine und basiert auf der Annahme, dass Normalen auf der Laminat-Mittelebene bei der Deformation eben und senkrecht zur Mittelebene bleiben. Diese Annahme ist gleichbedeutend mit einem Verschwinden der transversalen Schubdeformationen $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$. Außerdem wird von einer vernachlässigbaren Dickenänderung $\varepsilon_{zz}=0$ und dem ebenen Spannungszustand für die Einzelschichten ausgegangen, woraus $\sigma_{zz}=0$ folgt. Dies führt auf die folgenden Verschiebungsannahmen für die Verschiebungen u, v, w im Laminatkoordinatensystem:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\psi_x(x, y) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \quad (2.33)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\psi_y(x, y) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \quad (2.34)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.35)$$

Hierbei sind u_0, v_0, w_0 die Verschiebungen der Laminatmittelfläche ($z=0$) und $\psi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ bzw. $\psi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$ die Verdrehwinkel um die y - bzw. x -Achse. Aus den Verschiebungsannahmen können die Verzerrungen berechnet und in das Materialgesetz für die k -te Einzelschicht, Gleichung (2.32) eingesetzt werden:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = [\bar{Q}_{ij}]_k \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \right\} = [\bar{Q}_{ij}]_k \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.36)$$

In diesem Gesetz treten die Verzerrungen ($\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$) und Verkrümmungen ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$) der Laminatmittelebene auf. Zur Beschreibung des effektiven, konstitutiven Laminatverhaltens werden zunächst geeignete Schnittgrößen eingeführt. Durch Integration über die Laminatdicke resultieren die Schnittkräfte N_x, N_y, N_{xy} , die Biegemomente M_x, M_y und das Drillmoment M_{xy} unter Berücksichtigung des Materialgesetzes (2.36) zu:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right\} dz \quad (2.37)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right\} z dz \quad (2.38)$$

Durch Ausführen der schichtweisen Integration und anschließender Summation resultieren die konstitutiven Beziehungen für den Mehrschichtenverbund:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Die Laminat-Steifigkeitsmatrix, auch ABD -Matrix genannt, kann in einen Scheibenquadranten $[A_{ij}]$, einen Plattenquadranten $[D_{ij}]$ und einen Koppelquadranten $[B_{ij}]$ unterteilt werden. Sie berechnen sich entsprechend Gleichung (2.38) zu:

$$[A_{ij}] = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2.40)$$

$$[B_{ij}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.41)$$

$$[D_{ij}] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3). \quad (2.42)$$

Die Laminattheorie unterscheidet sich von der klassischen Platten- bzw. Scheibentheorie maßgeblich durch das Auftreten der Koppelsteifigkeiten. Tritt eine Kopplung verschiedener Deformationsmoden auf, können diese nur gemeinsam vorkommen. Die wichtigsten Koppelgrößen sind die Dehn-Schubkoppelsteifigkeiten A_{16} und A_{26} , die Biege-Drillkoppelsteifigkeiten D_{16} und D_{26} und die Biege-Dehnkoppelsteifigkeiten B_{ij} . Streng genommen sind auch A_{12} und D_{12} Koppelsteifigkeiten. Sie bilden Querkontraktionseffekte ab und treten auch bei isotropen Werkstoffen auf.

Schubdeformationstheorie 1. Ordnung

Da die klassische Laminattheorie durch den gewählten Verschiebungsansatz Schubstarrheit in transversaler Richtung ($\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$) voraussetzt, ist eine direkte Ermittlung der interlamina- ren Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} über das Elastizitätsgesetz nicht möglich. Auch der Einfluss der Schubdeformation geht verloren. Dicke, schubweiche Lamine können mit den Verschie- bungsansätzen der klassischen Laminattheorie nicht hinreichend genau beschrieben werden. Wird die Annahme senkrecht auf der deformierten Laminatmittelfläche stehender Querschnit- te fallen gelassen, resultieren zwei zusätzliche Unbekannte, die Verdrehwinkel ψ_x und ψ_y . Die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte bleibt erhalten. Die Verschiebungsannahme für die Schubdeformationstheorie 1.Ordnung schreibt sich demzufolge

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\psi_x(x, y) \quad (2.43)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\psi_y(x, y) \quad (2.44)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y). \quad (2.45)$$

Die Verzerrungen der Laminatmittelebene bleiben von dieser veränderten Verschiebungs- annahme unberührt. Für die Verkrümmungen der Laminatmittelebene folgt mit diesem Ansatz:

$$\kappa_x = \frac{\partial\psi_x}{\partial x} \quad , \quad \kappa_y = \frac{\partial\psi_y}{\partial y} \quad , \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x} \quad (2.46)$$

Außerdem lassen sich die transversalen Schubdeformationen berechnen zu:

$$\gamma_{xz} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.47)$$

Somit können die transversalen Schubspannungen ebenfalls über ein Materialgesetz berechnet werden. Für eine im Materialkoordinatensystem transversal isotrope Einzelschicht ergibt sich nach Drehung in das Laminatkoordinatensystem folgendes zusätzliches Materialverhalten:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Die gedrehten Komponenten \bar{Q}_{44} , \bar{Q}_{45} und \bar{Q}_{55} ergeben sich aus folgenden Transformations- beziehungen:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \vartheta + Q_{55} \sin^2 \vartheta, \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \vartheta \sin \vartheta, \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \vartheta + Q_{44} \sin^2 \vartheta, \end{aligned} \quad (2.49)$$

wobei die Komponenten im Materialkoordinatensystem folgenden Zusammenhang mit den Ingenieurskonstanten haben: $Q_{44}=G_{23}$ und $Q_{55}=G_{13}$. Zur Beschreibung des effektiven, konsti- tutiven Laminatverhaltens werden zunächst wieder geeignete Schnittgrößen eingeführt. Durch Integration über die Laminatdicke resultieren die Querkräfte Q_y , Q_x unter Berücksichtigung des Materialgesetzes (2.48) zu:

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = K_S \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k dz = K_S \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} dz, \quad (2.50)$$

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = K_S \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Aus der Bestimmung der Querkräfte und Schubverzerrungen aus dem Materialgesetz (2.51) folgen schichtweise konstante Schubspannungen. Dies verletzt zum einen die Bedingung der Schubfreiheit der Deckflächen und zum anderen werden die Schubspannungen hierdurch überschätzt. Deshalb wird ein Schubkorrekturfaktor K_S benötigt. Dieser kann berechnet werden, indem die Formänderungsenergie infolge der Querkraft mit derjenigen infolge der Schubspannungen verglichen wird, siehe Becker u. Gross (2002). Für einen beliebigen Laminataufbau kann der Schubkorrekturfaktor beispielsweise mit den Gleichungen aus Klarmann u. Schweizerhof (1993) berechnet werden.

Für die Auswertung eines Spannungskriteriums ist es weiterhin notwendig, die Spannungen σ_{yz} und σ_{xz} in das Materialkoordinatensystem σ_{23} und σ_{13} zu transformieren. Hierzu gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Nichtlineare Balkentheorie mäßiger Drehungen für schubweiche Lamine

Aus den oben eingeführten Laminattheorien lassen sich entsprechende Theorien für Tragwerke ableiten, deren Verschiebungen von nur einer unabhängigen Variablen x abhängen. Dies sind zum einen Laminatstrukturen, welche in y -Richtung einen ebenen Spannungszustand oder einen ebenen Verzerrungszustand aufweisen und zum anderen sind dies Laminatstrukturen unter zylindrischer Biegung. In allen Fällen muss die äußere Last eine reine Funktion der x -Koordinate sein und das Laminat-Layup muss eine eindimensionale Betrachtung erlauben. Im Folgenden soll die Theorie für einen Laminatbalken im Rahmen einer geometrisch nichtlinearen Betrachtung unter Berücksichtigung mäßiger Drehungen hergeleitet werden. Für die Berechnung von Laminatbalken ergeben sich Einschränkungen für die Dehn-Schubkoppelsteifigkeiten $A_{16}=A_{26}=0$ N/mm, die Biege-Drillkoppelsteifigkeiten $D_{16}=D_{26}=0$ Nmm und die Biege-Dehnkoppelsteifigkeiten $B_{12}=B_{16}=B_{26}=0$ N, da diese Kopplungssteifigkeiten zu einer von der y -Koordinate abhängigen Deformation führen würden. Diese Einschränkungen können beispielsweise für Kreuzverbunde, deren Einzelschichten Verdrehwinkel $\vartheta=0^\circ$ oder $\vartheta=90^\circ$ aufweisen, erfüllt werden. Außerdem müssen die Kopplungen aus Querkontraktionseffekten und antiklastischer Krümmung, hervorgerufen durch A_{12} und D_{12} , für die Berechnung vernachlässigt werden. Diese Effekte treten auch bei isotropen Einzelschichten auf, sind aber im Rahmen der Balkentheorie mit guter Näherung vernachlässigbar. Für lange Laminatbalken kann der Einfluss von D_{12} sowie D_{16} näherungsweise vernachlässigt werden, siehe Reddy (2003). Für Winkelverbunde muss das Längen- (in x -Richtung) zu Breiten-Verhältnis (in y -Richtung) sehr groß sein um die Verdrillung, ausgelöst durch D_{16} , vernachlässigen zu können, siehe Reddy (2003). Für die folgenden Ausführungen wird davon ausgegangen, dass diese Koppeleffekte für den Laminatbalken vernachlässigbar sind. Diese Annahme ist auch für die spätere Anwendung auf die einschnittige Überlappungsklebung gerechtfertigt.

Wegen der Annahmen für die Last und den Schichtenaufbau kann der Laminatbalken durch folgende Verschiebungsannahme beschrieben werden:

$$u(x, z) = u_0(x) + z\psi_x(x) \quad , \quad v_0 = 0 \quad , \quad w_0 = w_0(x). \quad (2.53)$$

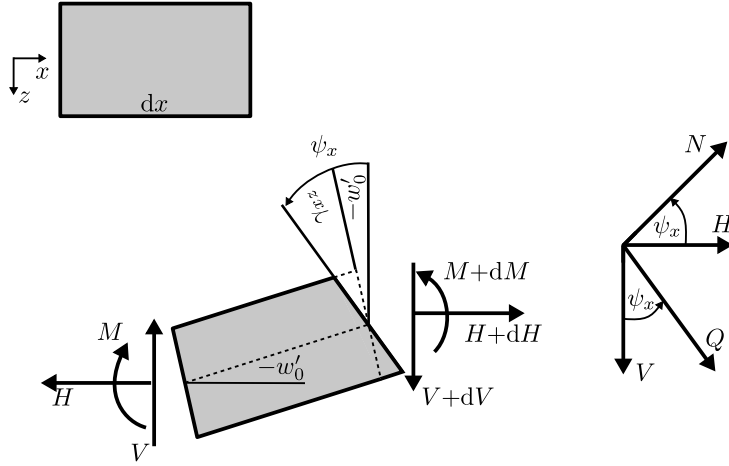


Abbildung 2.2: Kräftegleichgewicht in horizontaler und vertikaler Richtung. Ebenfalls dargestellt ist der Zusammenhang zwischen horizontalen Kräften H und vertikalen Kräften V mit den Schnittkräften in normaler Richtung N und transversaler Richtung Q .

Einsetzen des Verschiebungsansatzes in die kinematischen Gleichungen (2.12) für den GREEN-LAGRANGESCHEN-Verzerrungstensor führt zu den folgenden Verzerrungen

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= u'_0 + z\psi'_x + \underbrace{\frac{1}{2}(u'_0)^2 + \frac{1}{2}(w'_0)^2}_{\rightarrow 0} \\
 &= u'_0 + \frac{1}{2}(w'_0)^2 + z\psi'_x \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\psi_x + w'_0 + \underbrace{(u'_0 + z\psi'_x)\psi_x}_{\rightarrow 0} \right) \\
 &= \frac{1}{2}(\psi_x + w'_0)
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Zur Behandlung geometrisch nichtlinearer Probleme mit mäßigen Verdrehwinkeln wird der quadratische Term $(w'_0)^2$ nicht vernachlässigt. Die sich hierdurch ergebenden Verzerrungen werden auch VON-KÁRMÁN-Verzerrungen genannt, Reddy (2004). Die Annahme kleiner Verzerrungen wird aufrecht erhalten, weshalb die anderen quadratischen Terme $(u'_0)^2$ und $(u'_0 + z\psi'_x)\psi_x$ vernachlässigt werden. Dies führt auf die Verzerrungskomponenten ε_{xx} und $\varepsilon_{xz} = 1/2\gamma_{xz}$, alle anderen Verzerrungskomponenten ergeben sich identisch zu Null. Um die geometrisch nichtlinearen Effekte vollständig zu berücksichtigen, muss das Gleichgewicht am infinitesimalen deformierten Balkenelement der Länge dx aufgestellt werden. Wie in Abbildung 2.2 zu sehen wird das Kräfte- und Momentengleichgewicht zunächst mit den Kräften H und V in horizontaler und vertikaler Koordinatenrichtung aufgestellt.

$$H' = 0 \tag{2.55}$$

$$V' = 0 \tag{2.56}$$

$$M' + Hw'_0 - V = 0 \tag{2.57}$$

Diese Kräfte müssen in einem zweiten Schritt mit den Schnittkräften normal zum Querschnitt N und transversal zum Querschnitt Q in Beziehung gesetzt werden. Mit der Annahme mäßiger Verdrehwinkel $-7^\circ \leq \psi_x \leq 7^\circ$ können die Winkelfunktionen mit $\cos(\psi_x) \approx 1$ und $\sin(\psi_x) \approx \psi_x$

ersetzt werden. Dies ergibt folgenden Zusammenhang zwischen H, V und N, Q :

$$H = N \cos(\psi_x) + \cancel{Q \sin(\psi_x)}^0 \approx N \quad (2.58)$$

$$V = Q \cos(\psi_x) - N \sin(\psi_x) \approx Q - N\psi_x \quad (2.59)$$

Der Term $Q \sin(\psi_x)$ kann vernachlässigt werden, da die übertragbare Querkraft Q viel kleiner ist als die übertragbare Normalkraft N und mit einem kleinen Wert ψ_x multipliziert wird. Das Kräfte- und Momentengleichgewicht mit Schnittkräften formuliert lautet:

$$N' = 0 \quad (2.60)$$

$$Q' - \cancel{N'\psi_x}^0 - N\psi'_x = 0 \quad (2.61)$$

$$M' + Nw'_0 - Q + N\psi_x = 0 \quad (2.62)$$

Im Momentengleichgewicht wird der Term $N\psi_x$ häufig mit $-Nw'_0$ ersetzt um die gängige Beziehung $M'=Q$ zu erhalten, Reddy (2004). Dies stellt eine willkürliche Vermischung von BERNOULLI- mit TIMOSHENKO-Kinematik dar und wird deshalb an dieser Stelle unterlassen. Durch Integration der Schnittspannungen lässt sich nun das konstitutive Verhalten eines Laminatbalkens angeben als:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & 0 \\ B_{11} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & K_S A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Durch die Annahme der VON-KÁRMÁN-Verzerrungen ergibt sich hierbei $\varepsilon_0 = u'_0 + \frac{1}{2}(w'_0)^2$. Die Krümmung ergibt sich zu $\kappa = \kappa_x = \psi'_x$ und die Schubverzerrung zu $\gamma = \gamma_{xz}$. Außerdem gilt für die Schnittkräfte und Schnittmomente $N = N_x$, $Q = Q_x$ und $M = M_x$. Die Formänderungsenergie Π^i , die in einem Laminatbalken der Breite b und Länge l gespeichert ist, kann unter Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens ausgedrückt werden als:

$$\Pi^i = \int U dV = \frac{1}{2} b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dz dx \quad (2.64)$$

$$= \frac{1}{2} b \int_0^l \left(\frac{N^2 D_{11} + M^2 A_{11} - 2 N M B_{11}}{D_{11} A_{11} - B_{11}^2} + \frac{Q^2}{K_S A_{55}} \right) dx \quad (2.65)$$

Hierdurch sind alle Gleichungen für eine nichtlineare Balkentheorie mäßiger Drehungen für schubweiche Lamine eingeführt.

2.3 Festigkeitskriterien

In diesem Abschnitt werden die klassischen Spannungskriterien für isotropes Werkstoffverhalten und moderne Spannungskriterien für unidirektional faserverstärkte Werkstoffe vorgestellt. Häufig wird anstatt des Begriffes Spannungskriterium auch der Begriff Festigkeitskriterium verwendet. Streng genommen können Festigkeitskriterien nur bei Vorliegen eines homogenen Spannungszustands eingesetzt werden. Trotzdem liefern sie auch für schwach inhomogene Spannungsfelder zuverlässige Versagensvorhersagen. Für starke Spannungskonzentrationen

oder im Extremfall der Spannungssingularität verlieren sie jedoch ihre Aussagekraft. Allgemein kann jedes Festigkeitskriterium auf die folgende Form gebracht werden:

$$F(\sigma_{ij}) \geq 1. \quad (2.66)$$

Im Nachfolgenden werden die gebräuchlichsten Spannungskriterien kurz vorgestellt.

Hauptnormalspannungskriterium

Das Hauptnormalspannungskriterium eignet sich zur Versagenvorhersage von spröden Werkstoffen. Das Versagen wird durch Vergleich der größten Hauptnormalspannung σ_I mit der Zugfestigkeit R_t und der kleinsten Hauptnormalspannung σ_{III} mit der Druckfestigkeit R_c bestimmt.

$$\sigma_I \geq R_t \quad \vee \quad \sigma_{III} \leq -R_c \quad (2.67)$$

Die Versagensfläche im Raum der Hauptspannungen entspricht demzufolge der Oberfläche eines Würfels. Mögliche Interaktionen zwischen den Hauptnormalspannungen werden nicht berücksichtigt, weshalb das Hauptnormalspannungskriterium nur eingeschränkt anwendbar ist.

Power-Law-Interaktionskriterium

Um sprödes Versagen von Grenzflächen zu modellieren, wird häufig auf eine Power-Law-Interaktionsbeziehung zurückgegriffen. Über eine Grenzfläche zweier Schichten werden Normal- und Schubspannungen (σ_n, τ_{ns}) übertragen, welche zum Versagen in der Grenzfläche führen können. Als Festigkeitswerte werden σ_c für Versagen infolge Normalspannungen und τ_c für Versagen infolge Schubspannungen eingeführt. Allgemein lässt sich eine Interaktionsbeziehung formulieren als:

$$\left(\frac{|\sigma_n|}{\sigma_c} \right)^{n_\sigma} + \left(\frac{|\tau_{ns}|}{\tau_c} \right)^{n_\tau} \geq 1 \quad (2.68)$$

Für $n_\sigma=n_\tau=1$ fällt die Interaktionsbeziehung mit der bekannten COULOMB-MOHR-Hypothese zusammen und für $n_\sigma=n_\tau=2$ ergibt sich das häufig genutzte elliptische Spannungskriterium. Wenn einer der beiden Exponenten $n_\sigma \rightarrow \infty$ oder $n_\tau \rightarrow \infty$ liegt eine Entkoppelung der beiden Teilkriterien vor.

Gestaltänderungsenergiekriterium nach von Mises

Um duktilen Versagen zu bewerten, wird häufig Fließbeginn als kritischer Auslegungszustand betrachtet. Das bekannteste Kriterium zur Vorhersage des Fließbeginns ist die Gestaltänderungsenergiehypothese nach VON MISES. Versagen wird postuliert, wenn die Gestaltänderungsenergiegedichte $U_G = G(\varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij})(\varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij})$ einen kritischen Wert erreicht. Hieraus ergibt sich folgendes mit Hauptspannungen formuliertes Kriterium:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 = 2R_{p0,2}^2 \quad (2.69)$$

Hierbei ist $R_{p0,2}$ die aus einem einachsigen Zugversuch zu bestimmende 0,2%-Dehngrenze. Die Versagensfläche im Raum der Hauptspannungen entspricht einem Zylinder um die hydrostatische Achse.

Tsai-Wu-Kriterium

Für unidirektionale Faser-Verbund-Werkstoffe ist das TSAI-WU-Kriterium eines der bekanntesten Kriterien. Die Versagensfläche wird durch ein Tensorpolynom 2. Grades beschrieben. Im Materialkoordinatensystem ergibt sich somit folgendes Kriterium:

$$\frac{\sigma_1^2}{R_{\parallel}^+ R_{\parallel}^-} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{R_{\parallel}^+ R_{\parallel}^- R_{\perp}^+ R_{\perp}^-}} + \frac{\sigma_2^2}{R_{\perp}^+ R_{\perp}^-} + \frac{\sigma_{12}^2}{R_{\perp\parallel}^2} + \sigma_1 \left(\frac{1}{R_{\parallel}^+} - \frac{1}{R_{\parallel}^-} \right) + \sigma_2 \left(\frac{1}{R_{\perp}^+} - \frac{1}{R_{\perp}^-} \right) = 1. \quad (2.70)$$

Hierbei sind R_{\parallel}^+ und R_{\parallel}^- die faserparallelen Zug- und Druckfestigkeiten, R_{\perp}^+ und R_{\perp}^- die Zug- und Druckfestigkeit quer zur Faserrichtung und $R_{\perp\parallel}$ eine Schubfestigkeit für Schub in der x_1, x_2 -Ebene des Materialkoordinatensystems. Das TSAI-WU-Kriterium zeichnet sich durch eine einfache Handhabung aus, berücksichtigt jedoch keine Unterscheidung der einzelnen Versagensmoden.

Failure Mode Concept nach Cuntze

In modernen Festigkeitskriterien für Faser-Verbund-Werkstoffe werden die einzelnen Versagensmoden berücksichtigt. Als wichtigste Vertreter seien das Kriterium von HASHIN (Hashin (1980)), das Wirkebenenkriterium nach PUCK (Puck (1996), Puck u. Schürmann (1998)) und das Failure Mode Concept von CUNTZE (Cuntze (2006, 2012)) genannt. Im Folgenden wird das Failure Mode Concept von CUNTZE näher betrachtet, da es trotz seiner hohen Vorhersagequalität einfach in der Anwendung ist. Cuntze postuliert, dass die Anzahl unabhängiger Versagensmoden mit der Anzahl der unabhängigen Elastizitätskonstanten übereinstimmt. Für transversal-isotrope Werkstoffe ergeben sich somit fünf unabhängige Versagensmoden. Zwei Versagensmoden sind faserdominiert, Faserzugversagen (F_{\parallel}^+) und Faserdruckversagen (F_{\parallel}^-). Die restlichen drei Versagensmoden sind matrixdominiert, Matrixzugversagen (F_{\perp}^+), Matrixschubversagen ($F_{\perp\parallel}$) und Matrixdruckversagen (F_{\perp}^-). Zur Formulierung der einzelnen Teilkriterien werden zunächst Invarianten bezüglich einer Drehung um die Faser bzw. x_1 -Richtung eingeführt:

$$I_1 = \sigma_{11}, \quad (2.71)$$

$$I_2 = \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad (2.72)$$

$$I_3 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2, \quad (2.73)$$

$$I_4 = (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{23}^2, \quad (2.74)$$

$$I_5 = (\sigma_{22} - \sigma_{33})(\sigma_{13}^2 - \sigma_{12}^2) - 4\sigma_{23}\sigma_{13}\sigma_{12}. \quad (2.75)$$

Die einzelnen Teilkriterien im Failure Mode Concept von CUNTZE (Cuntze (2006)) lesen sich somit:

$$F_{\parallel}^+ = \frac{I_1}{R_{\parallel}^+}, \quad (2.76)$$

$$F_{\parallel}^- = \frac{-I_1}{R_{\parallel}^-}, \quad (2.77)$$

$$F_{\perp}^+ = \frac{I_2 + \sqrt{I_4}}{2R_{\perp}^+}, \quad (2.78)$$

$$F_{\perp}^{-} = (b_{\perp} - 1) \frac{I_2}{R_{\perp}^{-}} + b_{\perp} \frac{\sqrt{I_4}}{R_{\perp}^{-}}, \quad (2.79)$$

$$F_{\perp\parallel} = \frac{I_3^{\frac{3}{2}}}{R_{\perp\parallel}^3} + b_{\perp\parallel} \frac{I_2 I_3 - I_5}{R_{\perp\parallel}^3}. \quad (2.80)$$

Für die Koeffizienten $b_{\perp\parallel}$ und b_{\perp} gibt Cuntze folgende Erfahrungswerte an:

$$0,05 < b_{\perp\parallel} < 0,15 \quad \text{und} \quad 1,0 < b_{\perp} < 1,6 \quad (2.81)$$

Durch Interaktion der Teilkriterien ergibt sich eine Gleichung zur Versagensvorhersage

$$\begin{aligned} \left(\frac{F_{\parallel}^{+} + |F_{\parallel}^{+}|}{2} \right)^m + \left(\frac{F_{\parallel}^{-} + |F_{\parallel}^{-}|}{2} \right)^m + \left(\frac{F_{\perp}^{+} + |F_{\perp}^{+}|}{2} \right)^m + \\ + \left(\frac{F_{\perp}^{-} + |F_{\perp}^{-}|}{2} \right)^m + \left(\frac{F_{\perp\parallel} + |F_{\perp\parallel}|}{2} \right)^m = 1, \end{aligned} \quad (2.82)$$

wobei mögliche negative Beiträge eines Teilkriteriums durch Addition des Betrags ausgeschlossen werden. Als Interaktionsexponenten m empfiehlt Cuntze Werte zwischen $m=2,5 \dots 3,0$.

Theorie kritischer Distanzen

Die Festigkeiten, welche in Spanningskriterien als kritische Grenzwerte verwendet werden, werden in kontrollierten Versuchen gemessen, in denen homogene Spannungszustände vorliegen. Deshalb sind Festigkeitskriterien streng genommen nur zur Bewertung homogener Spannungszustände zulässig und verlieren mit zunehmender Inhomogenität des Spannungsfeldes an Aussagekraft. Für den Grenzfall der Spannungssingularität an einer Rissspitze ist mit den Spanningskriterien keine Versagensvorhersage mehr möglich, da jede noch so kleine Last zum Versagen führen würde. Dies widerspricht jedoch der Alltagserfahrung, in der Strukturen mit Anriss noch eine Resttragfähigkeit besitzen. Eine Möglichkeit auch stark inhomogene Spannungsfelder mit einem Spanningskriterium zu bewerten, konstituiert sich in der Theorie kritischer Distanzen, Taylor (2007). Die zu Grunde liegende Idee ist die nicht-lokale Auswerten eines Spanningskriteriums. Das Spanningskriterium wird beispielsweise an einem Punkt in einer kritischen Distanz l^* vor der Rissspitze ausgewertet:

$$F(\sigma_{ij}(l^*)) \geq 1. \quad (2.83)$$

Hierdurch wird ein zusätzlicher Längenparameter l^* eingeführt, der keinen Materialparameter darstellt und somit für jede Struktursituation neu bestimmt werden muss. Die punktweise Auswertung wird im folgenden mit (PM), aus dem Englischen "point method", abgekürzt. Neben der punktweisen Auswertung ist eine gemittelte Auswertung des Spanningskriteriums möglich:

$$\frac{1}{l^*} \int_0^{l^*} F(\sigma_{ij}(x)) dx \geq 1. \quad (2.84)$$

Zusätzlich ist es möglich das Spanningskriterium für die über die kritische Länge gemittelten Spannungen auszuwerten.

$$F \left(\frac{1}{l^*} \int_0^{l^*} \sigma_{ij}(x) dx \right) \geq 1 \quad (2.85)$$

Die gemittelte Auswertung entlang einer Linie wird im folgenden mit (LM), aus dem Englischen "line method", abgekürzt. Taylor (2007) weist auf die Möglichkeit hin, die Mittelung über eine Fläche oder ein Volumen durchzuführen. Aufgrund der entstehenden Komplexität werden diese Verfahren jedoch nicht weiter behandelt.

2.4 Einführung in die Bruchmechanik

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der linear-elastischen Bruchmechanik dargelegt. Treten in einem Körper Risse auf, sind klassische spannungsbasierte Festigkeitskriterien nicht direkt anwendbar. Da an einer Risspitze formal unendliche Spannungen auftreten, postulieren sie immer Versagen, unabhängig von der Höhe der Last. Deshalb werden in der linear-elastischen Bruchmechanik energiebasierte Konzepte zur Bewertung gerissener Strukturen bereitgestellt. Detaillierte Ausführungen finden sich bei Gross u. Seelig (2006) oder Kuna (2013). Zunächst werden die Nahfelder in der unmittelbaren Umgebung der Risspitze eingeführt. Anschließend wird die Energiebilanz bei Rissfortschritt aufgestellt und entsprechende Kriterien abgeleitet, die eine Bewertung des Rissfortschrittes zulassen. Im letzten Teilkapitel werden Struktursituationen mit singulären Spannungsfeldern ohne Riss vorgestellt.

Rissspitzenfelder

Die lokalen Spannungs- und Verschiebungsfelder in unmittelbarer Umgebung der Risspitze lassen sich mittels einer Eigenwertanalyse im Rahmen der komplexen Methode bestimmen. Für einen Riss in einem unendlich ausgedehntem, zweidimensionalen Körper mit homogenem, isotropem Material lässt sich das Rissspitzenfeld bezüglich eines (r, φ) -Polarkoordinatensystems mit Ursprung an der Risspitze wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} u_i - u_{i0} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n} \hat{u}_i^{(n)}(\varphi), & \lambda_n &= \frac{n}{2} \\ \sigma_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-1} \hat{\sigma}_{ij}^{(n)}(\varphi), & \lambda_n &= \frac{n}{2} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Hierbei sind $\hat{u}_i^{(n)}$ und $\hat{\sigma}_{ij}^{(n)}$ Funktionen des Winkels φ . Diese sind bis auf einen Faktor vollständig bestimmt. Durch die Konstante u_{i0} wird eine Starrkörperbewegung beschrieben. Die radiale Abhängigkeit des Verschiebungsfeldes wird über die Eigenwerte λ_n beschrieben und die radiale Abhängigkeit des Spannungsfeldes über die Singularitätsexponenten $\lambda_n - 1$. Das Spannungsfeld wird in unmittelbarer Umgebung der Risspitze, $r \rightarrow 0$, durch den ersten Term mit $\lambda_1 = 1/2$ dominiert. Dies führt zu einem Singularitätsexponenten $\lambda_1 - 1 = -1/2$ und somit zu einem Abklingverhalten der Ordnung $r^{-1/2}$ für die Spannungen. Diese lokalen Felder besitzen im vom Rissspitzenfeld dominierten Bereich immer die gleiche Form und interagieren nur über die noch zu bestimmenden Konstanten in den Winkelfunktionen mit dem globalen Belastungszustand. Weiterhin lassen sich die Rissspitzenfelder im zweidimensionalen Körper in einen symmetrischen Anteil (Modus I) und einen antisymmetrischen Anteil (Modus II) aufspalten. Für den ersten, das Nahfeld dominierenden, Term in Gleichung (2.86) ergibt sich

für Modus I:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{Bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{2G\sqrt{2\pi}} r^{\frac{1}{2}} (\kappa - \cos(\varphi)) \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Hierbei ist der Spannungsintensitätsfaktor K_I die einzige noch zu bestimmende Konstante. Er hängt von der Geometrie und von der Belastungssituation ab. Für viele Struktursituationen existieren Lösungen für Spannungsintensitätsfaktoren, die in Handbüchern wie zum Beispiel Tada et al. (2000) nachgeschlagen werden können. Die Konstante κ nimmt für den ebenen Verzerrungszustand $\kappa=3-4\nu$ und für den ebenen Spannungszustand $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ an. Ebenso können die Risspitzenfelder für den antisymmetrischen Modus II in Abhängigkeit eines Spannungsintensitätsfaktors K_{II} angegeben werden.

Energiebilanz bei Rissfortschritt

Ausgehend von einem rissbehafteten elastischen Körper wird nun die Energiebilanz bei Rissfortschritt aufgestellt. Dabei sei von den äußeren Lasten vorausgesetzt, dass sie ein Potential Π^a besitzen. Das innere Potential sei mit Π^i bezeichnet. Bei Rissfortschritt um ΔA geht das System aus einer Gleichgewichtslage 1 in eine Gleichgewichtslage 2 über. Um den Übergang zu modellieren, wird der Körper im Zustand 1 entlang der Fläche ΔA aufgeschnitten und die an der Schnittfläche wirkenden Spannungen als äußere Lasten aufgetragen. Diese werden quasistatisch auf Null reduziert bis der Zustand 2 erreicht ist. Dabei verrichten die Spannungen auf der Schnittfläche an den sich einstellenden Verschiebungen bei Rissöffnung eine Arbeit $\Delta W_\sigma \leq 0$. Die Arbeit W_{12}^a der äußeren Lasten bei Rissfortschritt kann wegen des Potentialcharakters als $W_{12}^a = -(\Pi_2^a - \Pi_1^a) = -\Delta\Pi^a$ ausgedrückt werden. Aus dem Energiesatz folgt nun:

$$\Pi_2^i - \Pi_1^i = -(\Pi_2^a - \Pi_1^a) + \Delta W_\sigma \quad (2.88)$$

$$\Delta\Pi = \Delta W_\sigma \leq 0 \quad (2.89)$$

Die durch Abnahme des Gesamtpotentials freigesetzte Energie steht somit für den Bruchprozess zur Verfügung. Für den zweidimensionalen Fall geht die Rissfläche über in $\Delta A = b\Delta a$ wobei b die Breite in die dritte Raumrichtung darstellt.

Risschließintegral/Rissöffnungsintegral

Außer der globalen Betrachtung über die Änderung des Gesamtpotentials lässt sich die freigesetzte Energie lokal mit dem Risschließintegral bestimmen. Für einen rein elastisch ablaufenden Rissfortschritt ohne dissipative Effekte wie Plastizität oder Reibung entspricht das Risschließen dem Rissöffnen. Im Allgemeinen sollte von einem Rissöffnungsintegral gesprochen werden, da somit alle beteiligten Effekte korrekt erfasst werden können. Ausgeführt wird das Rissöffnungsintegral indem der Spannungsvektor an jedem Punkt entlang der neu entstehenden Rissfläche während des Rissöffnens über den Verschiebungsvektor aufintegriert wird. Zusätzlich

wird über die gesamte Rissfläche ΔA integriert. Ebenso wie für das Rissspitzenfeld lässt sich die Energiefreisetzung für den zweidimensionalen Fall wieder in einen Anteil aus normaler Rissöffnung $\Delta W_{I\sigma}$ und einen Anteil aus tangentialer Rissöffnung $\Delta W_{II\sigma}$ aufspalten.

$$\begin{aligned}\Delta W_\sigma &= \Delta W_{I\sigma} + \Delta W_{II\sigma}, \\ \Delta W_{I\sigma} &= b \int_a^{a+\Delta a} \left[\int_{v_n^{(1)}(s)}^{v_{n+}^{(2)}(s)} \sigma_n^+(\tilde{v}_{n+}) d\tilde{v}_{n+} + \int_{v_n^{(1)}(s)}^{v_{n-}^{(2)}(s)} \sigma_n^-(\tilde{v}_{n-}) d\tilde{v}_{n-} \right] ds, \\ \Delta W_{II\sigma} &= b \int_a^{a+\Delta a} \left[\int_{u_s^{(1)}(s)}^{u_{s+}^{(2)}(s)} \tau_{ns}^+(\tilde{u}_{s+}) d\tilde{u}_{s+} + \int_{u_s^{(1)}(s)}^{u_{s-}^{(2)}(s)} \tau_{ns}^-(\tilde{u}_{s-}) d\tilde{u}_{s-} \right] ds.\end{aligned}\tag{2.90}$$

In diesen Gleichungen sind s und n lokale Koordinaten tangential bzw. normal auf den Rissflanken. Die gegenüberliegenden Rissflanken werden mit $+$ und $-$ unterschieden. Der gerissene Ausgangszustand ist mit (1) bezeichnet und der Zustand nach Rissfortschritt mit (2). Den größten Anwendungsbereich erfährt das Rissöffnungsintegral in der Finite-Elemente-Modellierung, dort kann es mit Knotenkräften und Knotenverschiebungen formuliert werden, siehe Rybicki et al. (1977). Für den Fall der linearen Elastizität lässt sich das Integral weiter vereinfachen zu:

$$\begin{aligned}\Delta W_{I\sigma} &= -\frac{1}{2}b \int_a^{a+\Delta a} \left[\sigma_n^{(1)} \left(v_{n+}^{(2)} - v_{n-}^{(2)} \right) \right] ds, \\ \Delta W_{II\sigma} &= -\frac{1}{2}b \int_a^{a+\Delta a} \left[\tau_{ns}^{(1)} \left(u_{s+}^{(2)} - u_{s-}^{(2)} \right) \right] ds.\end{aligned}\tag{2.91}$$

Unter der Annahme, dass eine Rissverlängerung um Δa den Beanspruchungszustand um die Rissspitze nicht wesentlich ändert, lässt sich der Aufwand zur Bestimmung der freigesetzten Energie weiter reduzieren. Nach Rybicki u. Kanninen (1977) und Buchholz (1984) ist im Falle selbstähnlichen Risswachstums lediglich eine Berechnung für den gerissenen Ausgangszustand nötig. Die Werte für den Zustand nach Rissfortschritt lassen sich unter dieser Annahme aus dem Ausgangszustand ableiten.

Bewertung von Rissfortschritt

Im Folgenden werden zwei Kriterien vorgestellt, die eine Bewertung ermöglichen, ob unter einer gegebenen Last Risswachstum stattfindet. Zum einen ist eine Bewertung der vorliegenden Rissspitzenfelder auf Basis der Spannungsintensitätsfaktoren mit dem K-Konzept nach Irwin (1957) möglich. Im Fall des K-Konzepts wird der Zusammenhang genutzt, dass die Rissspitzenfelder eindeutig durch die Spannungsintensitätsfaktoren charakterisiert werden. Die Spannungsintensitätsfaktoren sind somit ein Maß für die Belastung im Rissspitzenbereich und können mit einem kritischen Materialparameter, der Bruchzähigkeit K_c , verglichen werden:

$$K_I = K_{Ic} \quad \text{bzw.} \quad K_{II} = K_{IIc} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{K}(K_I, K_{II}, K_{Ic}, K_{IIc}) = 1 \tag{2.92}$$

In den meisten technischen Anwendungen liegt eine gemischte Beanspruchung aus mehreren Moden vor. Dann muss ein Bruchkriterium \mathcal{K} mit den Bruchzähigkeiten K_{Ic} , K_{IIc} und

dem Beanspruchungszustand K_I, K_{II} formuliert werden. Alternativ wird beim energetischen Bruchkriterium nach Griffith u. Eng (1921) die freigesetzte Energie bei Rissfortschritt mit einem kritischen Wert verglichen. Es lässt sich mithilfe des Risssschließintegrals zeigen, dass in der linearen Elastizitätstheorie beide Kriterien äquivalente Aussagen bzgl. Rissfortschritt liefern. Im Fall des energetischen Bruchkriteriums wird die freigesetzte Energie $\Delta\Pi = \Delta W_\sigma$ mit der Bruchenergie verglichen, die zur Schaffung einer neuen Oberfläche nötig ist. Zuerst wird die freigesetzte Energie auf die neu entstehende Rissfläche ΔA normiert. Hierdurch wird für finites Risswachstum die inkrementelle Energiefreisetzungsrate $\bar{\mathcal{G}}$ bzw. für infinitesimales Risswachstum die differentielle Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} wie folgt definiert:

$$\bar{\mathcal{G}} = -\frac{\Delta\Pi}{\Delta A} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta\Pi}{\Delta A} \right) = -\frac{d\Pi}{dA}. \quad (2.93)$$

Ebenso wie die Spannungsintensitätsfaktoren lassen sich auch die Energiefreisetzungsraten nach Rissöffnungsmoden trennen. Dafür kann das Rissöffnungsintegrals vorteilhaft genutzt werden:

$$\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_I + \bar{\mathcal{G}}_{II} = -\frac{\Delta W_{I\sigma}}{\Delta A} - \frac{\Delta W_{II\sigma}}{\Delta A}, \quad (2.94)$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_I + \mathcal{G}_{II} = -\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta W_{I\sigma}}{\Delta A} \right) - \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta W_{II\sigma}}{\Delta A} \right). \quad (2.95)$$

Für die Formulierung des energetischen Bruchkriteriums bei gemischter Beanspruchung wird zusätzlich das Mixed-Mode-Verhältnis ϕ eingeführt. Dieses kann an einer Risspitze über die nach Moden getrennte differentielle Energiefreisetzungsrate bestimmt werden:

$$\phi = \frac{\mathcal{G}_{II}}{\mathcal{G}_I + \mathcal{G}_{II}}. \quad (2.96)$$

Schließlich lässt sich ein energetisches Bruchkriterium immer in folgender Form angeben:

$$G(\mathcal{G}, \mathcal{G}_c) = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_c} \geq 1. \quad (2.97)$$

wobei für die effektive Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c eine Vielzahl an Formulierungen existieren. Falls keine gemischte Beanspruchung vorliegt, kann die kritische Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_c entweder mit \mathcal{G}_{Ic} für Modus I Rissöffnung oder mit \mathcal{G}_{IIc} für den Modus II gleichgesetzt werden. Andernfalls kann beispielsweise eine Potenzgesetz-Formulierung $\mathcal{G}_c^{\text{PL}}$ oder die Formulierung $\mathcal{G}_c^{\text{BK}}$ von Benzeggagh u. Kenane (1996) verwendet werden:

$$\mathcal{G}_c^{\text{PL}}(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \phi) = \frac{1}{\left(\left(\frac{1-\phi}{\mathcal{G}_{Ic}} \right)^n + \left(\frac{\phi}{\mathcal{G}_{IIc}} \right)^n \right)^{1/n}}, \quad (2.98)$$

$$\mathcal{G}_c^{\text{BK}}(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \phi) = \mathcal{G}_{Ic} + (\mathcal{G}_{IIc} - \mathcal{G}_{Ic})\phi^n. \quad (2.99)$$

Hierbei kann mit dem Exponent n das Maß der Interaktion zwischen den einzelnen Moden eingestellt werden. Mathews u. Swanson (2007) zeigten, dass für die Bewertung eines inter-laminaren Risses die Interaktion zwischen den Rissmoden berücksichtigt werden muss. Als Formulierung für die effektive Bruchzähigkeit zogen sie eine lineare Interaktionsbeziehung nach Wu (1967) bzw. Reeder (1993), ein Potenzgesetz nach Reeder (1993) oder die Formulierung von Benzeggagh u. Kenane (1996) heran, um die experimentellen Ergebnisse gut abbilden zu können. Als Exponent für das BK Kriterium wurde $n=4,78$ gewählt. Im Benutzerhandbuch

für die kommerzielle Finite-Elemente-Software Abaqus von Dassault Systemes wird ein Wert von $n=1,75$ vorgeschlagen. In der Arbeit von Benzeggagh u. Kenane (1996) wird abhängig von der Sprödigkeit des Materials ein Bereich zwischen $n=2,0-3,0$ angegeben. In der vorliegenden Arbeit wird für das BK-Kriterium der Wert $n=3,0$ gewählt. Für das Potenzgesetz wird in dieser Arbeit aus den Gründen, die in Talmon l'Armée et al. (2017) diskutiert werden, ein Exponent von $n=1,0$ gewählt.

Findet Risswachstum statt, besteht die Frage, ob das Risswachstum stabil oder instabil abläuft. Dazu ist zum einen die Entwicklung der Energiefreisetzungsrate $\mathcal{G}(a)$ und zum anderen die Entwicklung der effektiven Bruchzähigkeit $\mathcal{G}_c(a)$ mit der Risslänge zu betrachten.

$$\mathcal{G}(a) = \mathcal{G}_c(a) \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} \leq \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial a} \quad \text{stabil} \quad (2.100)$$

$$\mathcal{G}(a) = \mathcal{G}_c(a) \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} > \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial a} \quad \text{instabil} \quad (2.101)$$

Die experimentellen Befunde von Broberg (1999) zeigen beispielsweise ein Ansteigen der effektiven Bruchzähigkeit mit zunehmendem Rissfortschritt.

Methode virtueller Risse

Die Methode der virtuellen Risse stellt eine Möglichkeit dar, die klassische Bruchmechanik auch auf ungerissene Strukturen anzuwenden. Die zugrunde liegende Idee ist, einen gedachten Riss mit virtueller Länge a^* einzuführen. Dieser virtuelle Riss kann mit den Methoden der Bruchmechanik bewertet werden. Die nötige virtuelle Länge stellt wie l^* bei der Theorie kritischer Distanzen keinen Materialparameter dar und muss für jede Struktursituation neu bestimmt werden. Es ist nicht möglich diesen zusätzlich benötigten Längenparameter aus Material- und Strukturparametern zu berechnen. In Unterkapitel 2.5 wird eine Methode vorgestellt, die keine virtuellen Längen benötigt und eine Versagenslastbewertung ausschließlich aufgrund der Materialparameter Festigkeit und Bruchzähigkeit erlaubt.

Singuläre Spannungsfelder ohne Riss

Neben singulären Spannungsfeldern in der Umgebung einer Rissspitze gibt es weitere Struktursituationen mit singulären Spannungsfeldern. Dies können strukturelle Situationen mit materiellen bzw. geometrischen Diskontinuitäten sein, wie zum Beispiel der Kerb oder Bi-Materialpunkte bei Klebfügungen bzw. den Schichtübergängen an freien Laminaträndern. In diesen Fällen treten meist sogenannte schwache Spannungssingularitäten auf, die wie folgt charakterisiert sind:

$$\sigma_{ij} \propto r^{\lambda-1} \quad \text{mit} \quad -1/2 < \lambda - 1 < 0. \quad (2.102)$$

Durch ihr singuläres Verhalten sind die Spannungsfelder keiner Bewertung mit klassischen Festigkeitskriterien zugänglich, da jede noch so kleine Last zu sofortigem Versagen führen würde. Für eine bruchmechanische Bewertung muss zuerst die differentielle Energiefreisetzungsrate bestimmt werden. Diese kann beispielsweise mithilfe des Rissöffnungsintegrals abgeschätzt werden. Das Spannungsfeld an einer schwachen Singularität ohne Riss, Gleichung (2.102), entspricht dem Zustand (1). Das Verschiebungsfeld für den gerissenen Zustand (2) ist mit

Gleichung (2.87) bekannt, $u_i \propto r^{1/2}$. Ausführen des Riss-schließintegrals für einen Anriss Δa mit anschließendem Grenzübergang $\Delta a \rightarrow 0$ ergibt die differentielle Energiefreisetzungsrate:

$$\mathcal{G} \propto \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} r^{\lambda-1} r^{\frac{1}{2}} dr \quad (2.103)$$

$$\propto \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta a^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \Delta a^{\lambda-\frac{1}{2}} \quad (2.104)$$

Folglich ist die differentielle Energiefreisetzungsrate für eine schwache Spannungssingularität mit $\lambda \in (1/2 \dots 1]$ gerade null. Eine Bewertung im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik ist somit nicht möglich, da unendlich hohe Versagenslasten postuliert würden. Demgegenüber ergeben Festigkeitskriterien eine minimale Versagenslast von null. Weder Festigkeitskriterien noch bruchmechanische Kriterien genügen also zur Bewertung von Versagen an schwachen Spannungssingularitäten. Die Festigkeitskriterien gelten streng genommen nur für ein homogenes Spannungsfeld, wohingegen bruchmechanische Kriterien nur für den Sonderfall der Riss-spitzensingularität anwendbar sind. Für inhomogene Spannungsfelder bzw. schwache Spannungssingularitäten muss die Versagensbewertung also mit anderen Kriterien erfolgen. Eine Möglichkeit Festigkeitskriterien für diese Struktursituationen nutzbar zu machen ist die Theorie kritischer Distanzen, wobei das Spannungskriterium nichtlokal in einer Entfernung l^* von der Spannungskonzentration ausgewertet wird. Ebenfalls kann das Anwendungsgebiet der Kriterien der klassischen Bruchmechanik mit der Methode virtueller Risse erweitert werden. Dazu wird ein virtueller Riss der Länge a^* eingeführt. Diese beiden Methoden benötigen einen zusätzlichen Längenparameter l^* bzw. a^* , der keinen Materialparameter darstellt, sondern für jede Struktursituation neu bestimmt werden muss. Ein weiterer Ansatz, der ohne einen zusätzlichen Längenparameter auskommt, ist das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der finiten Bruchmechanik. Dieses wird im nächsten Unterkapitel 2.5 vorgestellt.

2.5 Die Bruchmechanik finiter Risse

Ein Bewertungskonzept, das sich für nichtsinguläre Spannungskonzentrationen und Spannungssingularitäten ohne Riss bewährt hat, ist das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der finiten Bruchmechanik (Leguillon (2002), Hashin (1996)). Durch das Postulat der instantanen Entstehung finiter Risse wird eine energetische, bruchmechanische Bewertung von Strukturen ohne initialen Riss möglich, wobei die finite Risslänge Δa zunächst eine Unbekannte darstellt. Versagen wird als Entstehung eines energetisch zulässigen finiten Risses in einem überbeanspruchten Bereich postuliert.

$$F(\sigma_{ij}(x, P)) \geq 1 \quad \forall x \in \Omega_c(\Delta a) \quad \wedge \quad G(\bar{\mathcal{G}}(P, \Delta a)) \geq 1 \quad (2.105)$$

Durch das gleichzeitige Erfüllen beider Kriterien können die beiden Unbekannten Versagenslast P und Risslänge Δa bestimmt werden. Hierdurch entfällt die Einführung eines zusätzlichen Längenparameters und eine Versagensbewertung ist auf Basis der bekannten Materialparameter Festigkeit und Bruchzähigkeit möglich. Hierzu wird zuerst durch eine Spannungsanalyse der ungerissenen Struktur der überbeanspruchte Bereich durch Auswertung eines geeigneten Spannungskriteriums $F(\sigma_{ij}(x, P))$ identifiziert. Darauf folgend müssen im Allgemeinen alle kinematisch möglichen Risse auf ihre energetische Zulässigkeit durch

Auswertung eines Energiekriteriums $G(\bar{\mathcal{G}}(P, \Delta a))$ überprüft werden. Durch die Anzahl der Rissvarianten (Ort, Länge, geometrische Form, Anzahl) kann die Auswertung sehr aufwendig werden. Meist ist es aber durch Kenntnis der Struktursituation möglich, die Anzahl der Rissvarianten zu reduzieren². Da die differentielle Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} nicht mehr zur energetischen Bewertung finiter Risse geeignet ist, muss eine neue Größe eingeführt werden. Hierzu wird im folgenden Unterabschnitt die inkrementelle Energiefreisetzungsrate $\bar{\mathcal{G}}$ eingeführt und ihr Zusammenhang mit der differentiellen Energiefreisetzungsrate diskutiert.

Differentielle und inkrementelle Energiefreisetzungsrate

Die differentielle Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} ist eine bekannte bruchmechanische Größe zur Bewertung gerissener Strukturen. Sie ist ein Maß für die freigesetzte Energie bei infinitesimalem Rissfortschritt. Im Gegensatz dazu ist die inkrementelle Energiefreisetzungsrate $\bar{\mathcal{G}}$ eine Größe, die erst mit dem Auftreten der finiten Bruchmechanik Bedeutung erlangt. Durch das Konzept der finiten Rissentstehung lassen sich auch ungerissene Strukturen energetisch bewerten. Die inkrementelle Energiefreisetzungsrate ist ein Maß für die freigesetzte Energie bei finiter Rissentstehung. Beide Größen sind auf die neu entstehende Rissfläche normiert:

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{dA} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta\Pi}{\Delta A} \right), \quad (2.106)$$

$$\bar{\mathcal{G}} = -\frac{\Delta\Pi}{\Delta A} = -\frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\Delta A}. \quad (2.107)$$

Π_2 ist das Gesamtpotential der gerissenen Konfiguration und Π_1 das Gesamtpotential der ungerissenen Konfiguration, ΔA ist die neu entstandene Rissfläche. Für eine finite Rissentstehung nimmt ΔA einen finiten Wert an, während für infinitesimales Risswachstum der Grenzübergang $\Delta A \rightarrow 0$ durchgeführt wird. Für eine zweidimensionale Modellierung kann die finite Risslänge mit $\Delta A = b\Delta a$ ausgedrückt werden, wobei die Größe b ein Maß für die Dimension in der dritten Raumrichtung darstellt. Über die Integrationsregel von Leibniz lässt sich ein Zusammenhang zwischen der differentiellen und inkrementellen Energiefreisetzungsrate herleiten:

$$\bar{\mathcal{G}}(a, \Delta a) = \frac{1}{\Delta a} \int_a^{a+\Delta a} \mathcal{G}(\tilde{a}) d\tilde{a}, \quad (2.108)$$

$$\mathcal{G}(a + \Delta a) = \bar{\mathcal{G}}(a, \Delta a) + \Delta a \bar{\mathcal{G}}'(a, \Delta a). \quad (2.109)$$

In Gleichung (2.109) zeigt sich ein interessanter Zusammenhang. Tritt ein Extremalwert für die inkrementelle Energiefreisetzungsrate ($\bar{\mathcal{G}}' = 0$) auf, nehmen die differentielle und inkrementelle Energiefreisetzungsrate den gleichen Wert an. Alternativ zur globalen Bestimmung der Energiefreisetzungsrate können die differentielle und inkrementelle Energiefreisetzungsrate lokal mit dem Rissöffnungsintegral bestimmt werden, siehe Talmon l'Armée et al. (2017). Darüber hinaus ist es mit dieser Methode möglich, die Energiefreisetzungsrate nach Rissöffnungsmoden mit den Formeln aus Gleichung (2.90) aufzuspalten. Für eine zweidimensionale Struktursituation setzen sich die Energiefreisetzungsrate demzufolge aus den Anteilen für Rissöffnungsmodus I und II wie folgt zusammen:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_I + \mathcal{G}_{II} \quad , \quad \bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_I + \bar{\mathcal{G}}_{II} \quad (2.110)$$

²Von einem im Modus I belasteten Kerb geht zum Beispiel ein gerader Riss direkt vom Kerbgrund aus. Die Risslänge bleibt der einzige Parameter, der zu beachten ist.

Auch für die Entstehung finiter Risse kann ein Mixed-Mode-Verhältnis ϕ eingeführt werden. In der Literatur finden sich hierzu verschiedene Ansätze, welche in Abschnitt 3.2 vorgestellt werden. An dieser Stelle werden zwei verbreitete Formulierungen vorgestellt. Zum einen kann das Mixed-Mode-Verhältnis mit der nach Moden getrennten inkrementellen Energiefreisetzungsrate bestimmt werden:

$$\phi = \frac{\bar{\mathcal{G}}_{\text{II}}}{\bar{\mathcal{G}}_{\text{I}} + \bar{\mathcal{G}}_{\text{II}}} \quad (2.111)$$

Zum Anderen ist es möglich, den Spannungszustand der ungerissenen Struktur entlang des gedachten Risses Δa zu verwenden:

$$\phi = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\tau_{\text{ns}}(\tilde{a})}{\langle \sigma_{\text{n}}(\tilde{a}) \rangle} \right) d\tilde{a} \quad (2.112)$$

Hierbei sind σ_{n} Spannungen normal zur gedachten Rissflanke und τ_{ns} Schubspannungen in tangentialer Richtung und $\langle \cdot \rangle$ steht für die FÖPPL- bzw. MACAULAY-Klammern.

Formulierung des gekoppelten Kriteriums als Optimierungsproblem

Das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium kann als Optimierungsproblem für die Versagenslast P_{f} formuliert werden. Leguillon (2002) formulierte das Kriterium erstmals unter Verwendung eines punktweise ausgewerteten Spannungskriteriums:

$$P_{\text{f}} = \min_{P, \Delta a} \left\{ P \mid F(\sigma_{ij}(x, P)) \geq 1 \ \forall \ x \in \Omega_{\text{c}}(\Delta a) \ \wedge \ G(\bar{\mathcal{G}}(P, \Delta a)) \geq 1 \right\}. \quad (2.113)$$

Minimiere die Last P (Zielfunktion) unter den folgenden Restriktionen: Im ungerissenen Zustand muss das Spannungskriterium $F(\sigma_{ij}(x, P))$ an allen Punkten x auf der potentiellen Rissfläche Ω_{c} eines finiten Risses Δa erfüllt sein. Gleichzeitig muss die energetische Zulässigkeit des finiten Risses mit einem Energiekriterium $G(\bar{\mathcal{G}}(P, \Delta a))$ geprüft werden. Als Entwurfsvariablen stehen die äußere Last P und die Risslänge Δa zur Verfügung³. Physikalisch gesehen bestimmt das Spannungskriterium einen überlasteten Bereich in dem finite Risse entstehen dürfen. Es gibt demzufolge eine obere Schranke für die möglichen Risslängen an. Das Energiekriterium trifft eine Aussage darüber, ob ein möglicher Riss auch energetisch zulässig ist, dies entspricht einer unteren Schranke für die nötige Risslänge. Falls das Spannungskriterium einen monoton fallenden und das Energiekriterium einen monoton steigenden Verlauf aufweisen, kann das Optimierungsproblem vereinfacht werden. In diesem Fall wird die Risslänge durch das Spannungskriterium festgelegt und als einzige Entwurfsvariable bleibt die zu minimierende Last. Gilt überdies lineare Elastizität kann folgender Zusammenhang angegeben werden:

$$F(\sigma_{ij}(x, P)) = 1 \quad \wedge \quad G(\bar{\mathcal{G}}(P, \Delta a)) = 1 \quad (2.114)$$

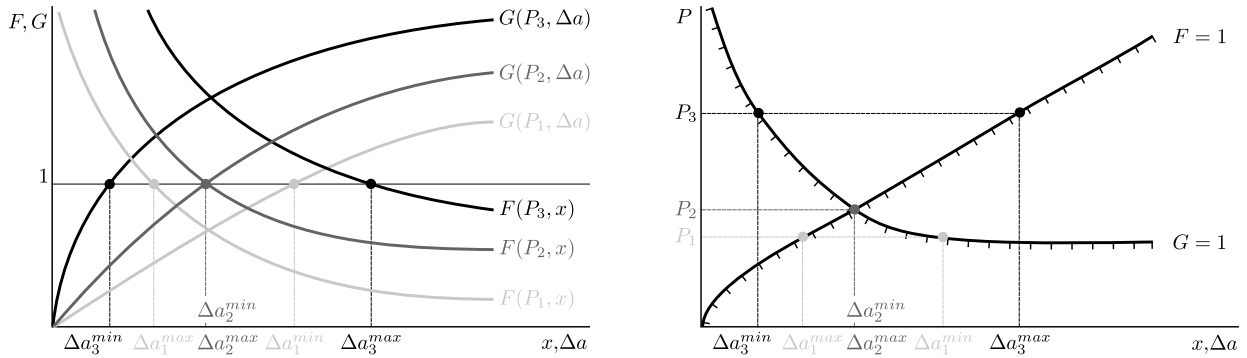
Unter geeigneter Auswahl des Spannungs- als auch Energiekriteriums lässt sich das Gleichungssystem bestehend aus zwei Gleichungen und den zwei Unbekannten P und Δa analytisch lösen. Eine alternative Formulierung des Optimierungsproblems wurde von Cornetti et al.

³Je nach Struktursituation können noch zusätzliche Entwurfsvariablen hinzukommen wie Anzahl der Risse, Ort, Rissgeometrie, Orientierung der Risse im Raum, etc..

(2006) vorgeschlagen. Der Unterschied liegt in der Auswertung des Spannungskriteriums. Dieses wird nicht punktweise, sondern über die Risslänge gemittelt ausgewertet. Somit folgt:

$$P_f = \min_{P, \Delta a} \left\{ P \left| \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} F(\sigma_{ij}(x, P)) dx \geq 1 \wedge G(\bar{G}(P, \Delta a)) \geq 1 \right. \right\} \quad (2.115)$$

Im Folgenden wird die punktweise Auswertung des Spannungskriteriums mit PM, aus dem Englischen "point method", und die gemittelte Auswertung mit LM, aus dem Englischen "line method", abgekürzt.



(a) Optimierungsproblem für den Kerb dargestellt als Kurvenscharen in der F, x - bzw. $G, \Delta a$ -Ebene mit der Last P als Scharparameter

(b) Optimierungsproblem für die Last P für den Kerb dargestellt in der P, x - bzw. $P, \Delta a$ -Ebene. Der Schnittpunkt der Restriktionen ist in diesem Sonderfall die Lösung des Optimierungsproblems.

Abbildung 2.3: Optimierungsproblem für den Kerb, gezeigt in zwei unterschiedlichen Darstellungen

In Abbildung 2.3 ist das Optimierungsproblem für finite Rissentstehung ausgehend von einem Kerb auf zwei unterschiedliche Arten veranschaulicht. In Unterabbildung 2.3a sind die beiden Restriktionen F und G über der Entfernung zum Kerbgrund x bzw. der finite Risslänge Δa für verschiedene Lasten $P_1 < P_2 < P_3$ aufgetragen. Es ist deutlich zu sehen, dass für die kleinste Last P_1 die obere Schranke für die Risslänge aus dem Spannungskriterium F einen kleineren Wert als die untere Schranke aus dem Energiekriterium G aufweist, $\Delta a_1^{\max} < \Delta a_1^{\min}$. Demzufolge ist der maximal zulässige Riss energetisch nicht möglich und die Last liegt unterhalb der Versagenslast. Im Gegensatz dazu liegt die untere Schranke für die Last P_3 oberhalb der oberen Schranke $\Delta a_3^{\min} < \Delta a_3^{\max}$, somit liegt die Last oberhalb der eigentlichen Versagenslast. Für P_2 ist die Versagenslast gerade erreicht und die untere und obere Schranke stimmen überein $\Delta a_2^{\min} = \Delta a_2^{\max}$. In Unterabbildung 2.3b ist das Optimierungsproblem für die Zielgröße P aufgetragen. Die Restriktionen $F=1$ und $G=1$ geben den zulässigen Bereich an in welchem die Last P minimiert wird. Die minimale zulässige Last P_2 ist hier im Schnittpunkt der beiden Restriktionen zu sehen. Wird für den Kerb das Spannungskriterium gemittelt ausgewertet, führen gleichbleibende Lasten P_1, P_2, P_3 zu größeren oberen Schranken $\Delta a_1^{\max}, \Delta a_2^{\max}, \Delta a_3^{\max}$ wobei die unteren Schranken unverändert bleiben. Dies führt zu einer geringfügig verringerten Versagenslast während die zugehörige Risslänge etwas größer ausfällt. Für den Kerb zeigen das Spannungskriterium als auch das Energiekriterium monotone Verläufe. Selten treten Struktursituationen mit nicht-monotonen Verläufen von F bzw. G auf. Dann können lokale Minima auftreten und die Vereinfachung aus Gleichung (2.114) kann nicht angewendet werden.

Die Wahl eines Spannungs- und Energiekriteriums sollte an die zu untersuchende Struktur-situation angepasst werden, um zuverlässige Ergebnisse für die Versagenslast zu erhalten. In Abschnitt 2.3 sind unterschiedliche Spannungskriterien vorgestellt worden. In Unterabschnitt 2.4 wurden Energiekriterien für den Rissfortschritt in einer gerissenen Struktur behandelt. Im nächsten Unterkapitel wird nochmals eine energetische Betrachtung für Rissentstehung im Rahmen der finiten Bruchmechanik diskutiert.

Energiekriterium für finite Rissentstehung

Ausgehend von einer finiten Rissentstehung kann im Rahmen der finiten Bruchmechanik ein an das GRIFFITH-Kriterium, Gleichung (2.97), angelehntes Energiekriterium eingeführt werden. Hierzu wird statt der differentiellen die inkrementelle Energiefreisetzungsrate $\bar{\mathcal{G}}$ mit einem kritischen Wert \mathcal{G}_c verglichen. Dies führt auf das folgende Energiekriterium:

$$G(\bar{\mathcal{G}}, \mathcal{G}_c) = \frac{\bar{\mathcal{G}}}{\mathcal{G}_c} \geq 1. \quad (2.116)$$

Hierbei stellt die inkrementelle Energiefreisetzungsrate einen gemittelten Wert dar, der mit Gleichung (2.108) aus der differentiellen Energiefreisetzungsrate berechnet werden kann. Bei der Mittelung werden alle Risslängen von $a=0$ bis $a=\Delta a$ durchlaufen. Dieser Zusammenhang lässt darauf schließen, dass bei instantaner, finiter Rissentstehung Δa alle Zwischenzustände a durchlaufen werden und somit auch für den Versagensprozess von Bedeutung sind.

Die effektive Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c ist ein Versagensparameter, der abhängig von den Bruchzähigkeiten \mathcal{G}_{Ic} , \mathcal{G}_{IIc} als Materialparameter und vom Mixed-Mode-Verhältnis $\phi(a)$ mit Gleichung (2.98) oder (2.99) bestimmt werden kann. Mit welchen Größen das Mixed-Mode-Verhältnis ϕ bei finiter Rissentstehung bestimmt wird, ist nicht eindeutig festgelegt. Einerseits kann das Mixed-Mode-Verhältnis mit den inkrementellen Energiefreisetzungsraten ($\bar{\mathcal{G}}_I, \bar{\mathcal{G}}_{II}$) zugehörig zur finiten Rissentstehung mit Gleichung (2.111) oder auf Basis des Spannungszustandes der ungerissenen Struktur mit Gleichung (2.112) berechnet werden.

Andererseits kann das Mixed-Mode-Verhältnis auch mit den differentiellen Energiefreisetzungsraten ($\mathcal{G}_I, \mathcal{G}_{II}$) zugehörig zur Rissspitze des neu entstandenen Risses bestimmt werden. Dies ermöglicht es, bei der Bestimmung der kritischen Energiefreisetzungsrate genauso wie bei der Bestimmung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate alle Zwischenzustände $a=0$ bis $a=\Delta a$ zu berücksichtigen, wie in Talmon l'Armée et al. (2017) gezeigt wurde. Zur Ermittlung dieses Zusammenhangs wird von der Energiebilanz ausgegangen:

$$\dot{K} + \dot{\Pi} + \dot{\Gamma} = 0 \quad (2.117)$$

\dot{K} ist die Änderungsrate der kinetischen Energie, $\dot{\Pi}$ die Änderungsrate des Gesamtpotentials und $\dot{\Gamma}$ die Änderungsrate der Dissipation infolge Rissentstehung. Hierbei ist $\dot{\Gamma} \geq 0$ da Rissbildung ein irreversibler Prozess ist. Alle anderen dissipativen Prozesse wie Reibung oder Plastizität werden vernachlässigt. Für infinitessimales Risswachstum kann die Dissipation angegeben werden als

$$d\Gamma = \mathcal{G}_c(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \phi(a)) b \Delta a \, dt = b \mathcal{G}_c(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \phi(a)) d(\Delta a), \quad (2.118)$$

wobei die effektive Bruchzähigkeit als eine Funktion des Mixed-Mode-Verhältnis $\phi(a)$ und der kritischen Werte $(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc})$ für reine Modus I bzw. Modus II Belastung angegeben ist. Mit dieser Beziehung und Integration der Energiebilanz folgt:

$$\Delta\Pi + b \int_a^{a+\Delta a} \mathcal{G}_c(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \phi(\tilde{a})) d\tilde{a} = -\dot{K} \leq 0. \quad (2.119)$$

Durch die Annahme eines ruhenden Ausgangszustands kann die kinetische Energie nur zunehmen, folglich ist $\dot{K} \geq 0$ und das Gleichheitszeichen kann durch ein Kleiner-gleich-Zeichen ersetzt werden. Zu Formulierung des Energiekriteriums wird schlussendlich noch durch die Rissfläche $\Delta A = b\Delta a$ geteilt und Gleichung (2.108) angewandt.

$$\bar{\mathcal{G}} = -\frac{\Delta\Pi}{\Delta A} \geq \frac{1}{\Delta a} \int_a^{a+\Delta a} \mathcal{G}_c(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \phi(\tilde{a})) d\tilde{a} = \bar{\mathcal{G}}_c \quad (2.120)$$

$$\frac{1}{\Delta a} \int_a^{a+\Delta a} \mathcal{G}(\tilde{a}) d\tilde{a} \geq \frac{1}{\Delta a} \int_a^{a+\Delta a} \mathcal{G}_c(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \phi(\tilde{a})) d\tilde{a} \quad (2.121)$$

In Gleichung (2.121) werden beide im Energiekriterium benötigten Größen mittels einer Integration über die Zwischenzustände ermittelt. In verkürzter Schreibweise lässt sich das Energiekriterium wieder auf die bekannte Form reduzieren:

$$G(\bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}_c) = \frac{\bar{\mathcal{G}}}{\bar{\mathcal{G}}_c} \geq 1 \quad (2.122)$$

Mit dieser Formulierung kann die finite Bruchmechanik auf eine gemittelte Bewertung aller gerissenen Zwischenzuständen bis zum Erreichen der finiten Risslänge zurückgeführt werden. Alle Zwischenzustände können wiederum im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik beschrieben werden. Mit dieser Betrachtung kann die Bewertung von finiten Rissen auch mit Mitteln der linear-elastischen Bruchmechanik erfolgen. Die effektive Bruchzähigkeit kann wieder mit Gleichungen (2.98) und (2.99) als Funktion des Mixed-Mode-Verhältnis ausgedrückt werden. Setzt man für die Bruchzähigkeit einen konstanten Wert ein, reduziert sich Gleichung (2.122) auf Gleichung (2.116).

Kapitel 3

Stand der Forschung

Im folgenden Kapitel wird der aktuelle Stand der Forschung für die in dieser Arbeit relevanten Themen dargelegt. Außerdem werden Analysemethoden vorgestellt, die für die vorliegende Arbeit verwendet werden oder an die vorliegende Struktursituation einer einschnittigen Überlappungsklebung angepasst werden. Hierbei muss vor allem das geometrisch nichtlineare Strukturverhalten berücksichtigt werden. Weiterhin werden die Inhalte anderer Forschungsvorhaben diskutiert, um die Ergebnisse der nachfolgenden Kapitel im Rahmen des aktuellen Forschungsstandes zu validieren.

3.1 Balken- und Sandwichmodelle für einschnittige Überlappungsklebungen

Das mechanische Verhalten von Strukturklebungen und der einschnittigen Überlappungsklebung im Speziellen ist aus den in Abschnitt 1.1 genannten Gründen ein aktuelles Forschungsfeld. Vor allem die Bereitstellung effizienter Analysemethoden für die Vorauslegung und Optimierung ist hierbei ein wichtiges Themengebiet. Wegen ihrer geringen Rechenzeiten kommen vor allem analytische oder semi-analytische Modelle zur effizienten Strukturbewertung zum Einsatz. Für die einschnittige Überlappungsklebung können existierende Modelle in zwei Kategorien eingeteilt werden: Die äquivalenten Einzelschichtmodelle und mehrschichtige Ansätze. Im nächsten Unterkapitel werden diese beiden Ansätze ausführlich erklärt und die für die vorliegende Arbeit relevanten Beiträge vorgestellt.

Äquivalente Einzelschicht- und Mehrschicht-Modelle

In den meisten Arbeiten zu Überlappungsklebungen wird der Überlappungsbereich als dreilagiges Sandwich (Fügeteil/Klebung/Fügeteil) modelliert, wobei für die Klebschicht eine vereinfachte Kinematik zugrunde gelegt wird. Diese Art der Modellbildung wird häufig als Sandwich-Modell oder Mehrschicht-Modell bezeichnet, siehe Weißgraeber et al. (2014). Die ersten Arbeiten zur Spannungsanalyse von einschnittigen Überlappungsklebungen stammen von Volkersen (1938), Goland u. Reissner (1944) und Hart-Smith (1973b). Wird nur der Überlappungsbereich unter allgemeiner Belastung modelliert, führt dies auf ein verallgemeinertes Mehrschicht-Modell, siehe Bigwood u. Crocombe (1989), Weißgraeber et al. (2014) und Liu et al. (2014). Mit dieser Modellierung können alle Arten der Überlappungsklebung abgebildet werden, solange an den Überlappungsenden die entsprechenden Randlasten vorliegen. Die Ermittlung der Randbedingungen an den Überlappungsenden ist allen Mehrschicht-Modellen gemeinsam. Im Allgemeinen können an jedem der vier Enden die Normalkraft, die Querkraft und das Biegemoment vorgegeben werden, insgesamt 12 Randbedingungen. Hierbei hat die Güte der Randbedingungen, als Eingangsparameter für jede weitere strukturmechanische

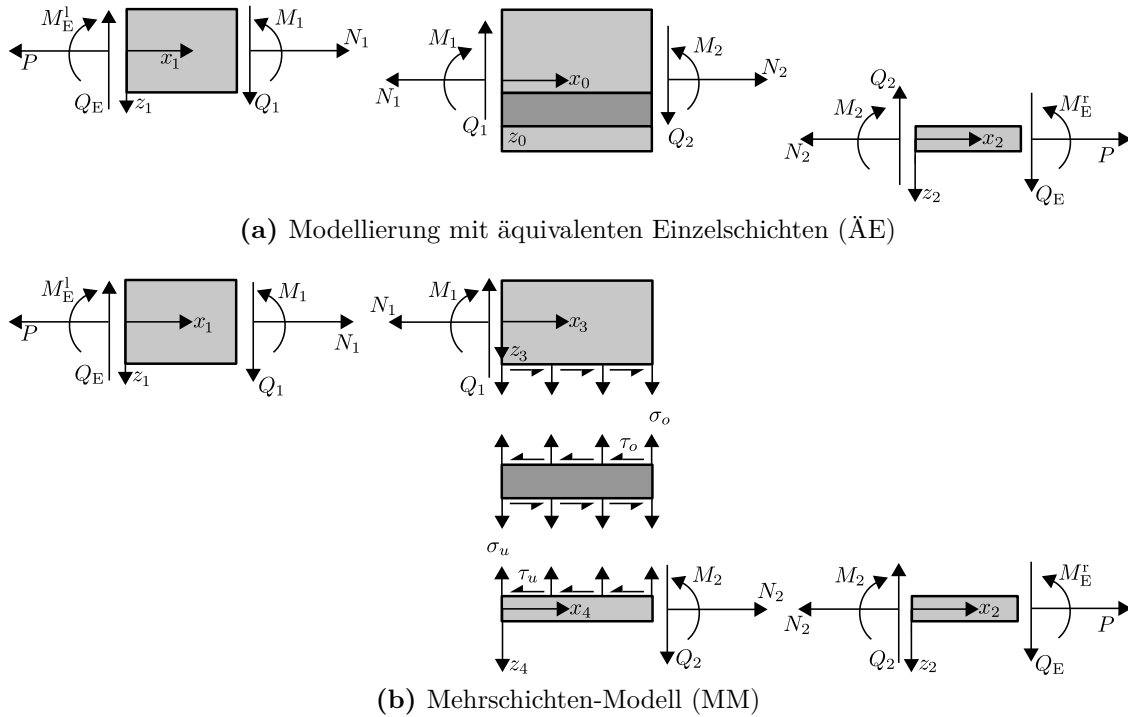


Abbildung 3.1: (a) Äquivalente Einzelschichten: Jeder der drei Teilbereiche wird als Balken modelliert. Dabei werden die jeweiligen Schichten in den Teilbereichen als eine einzelne äquivalente Einzelschicht angenommen. (b) Mehrschichten-Modell: Der Überlappungsbereich wird als zwei auf der Klebschicht gebettete Balken modelliert

Berechnung, direkte Auswirkungen auf die Qualität der Ergebnisse, siehe beispielsweise Luo u. Tong (2008). Zur Ermittlung der Randbedingungen für die einschnittige Überlappungsklebung finden sich in der Literatur zwei unterschiedliche Herangehensweisen. Zum Einen werden zur Modellierung, wie in Abbildung 3.1a dargestellt, äquivalente Einzelschichten (ÄE) verwendet. Hierbei wird jeder der drei Teilbereiche als Balken angesehen. Im mittleren Teilbereich werden alle Schichten als eine einzelne äquivalente Einzelschicht modelliert. Dies führt zu drei gekoppelten Balken mit diskontinuierlichen Mittelebenen an den Übergängen. Beim Mehrschichten-Modell (MM) wird der Überlappungsbereich, wie in Abbildung 3.1b dargestellt, weiter unterteilt. Dazu wird der Überlappungsbereich als zwei auf der Klebschicht gebettete Balken modelliert. Hierbei wird für die Klebschicht eine reduzierte Kinematik angenommen. Für die MM werden die Schnittgrößen häufig nicht explizit angegeben. Trotzdem werden sie implizit zur Herleitung der Klebschichtspannungen verwendet.

Ermittlung der Randlasten an den Überlappungsenden

Die meisten analytischen Arbeiten befassen sich mit ausgeglichenen Fügungen, siehe Goland u. Reissner (1944), Hart-Smith (1973b), Oplinger (1991), Luo u. Tong (2004), Guo et al. (2006), Li u. Lee-Sullivan (2006b), Luo u. Tong (2009). Diese sind charakterisiert durch einen symmetrischen Überlappungsbereich (Geometrie und Material) bezüglich der Mittelebene der Klebschicht mit gleich langen Fügeteilen. Außerdem wird in vielen Arbeiten die Klebschichtdicke vernachlässigt (Goland u. Reissner (1944), Cheng et al. (1991), Guo et al. (2006), Zhao et al. (2010), Renton u. Vinson (1973)) und für FKV-Fügeteile wird die Biege-Dehn-Kopplung nicht berücksichtigt (Hart-Smith (1973b), Wah (1973), Renton

u. Vinson (1973), das Neves et al. (2009)). In Tabelle 3.1 ist eine Zusammenfassung der wichtigsten Modellierungsannahmen zu sehen.

	Mod. An.		Üb.	Fügeteil					Kl.	Versch. An.	
	ÄE	MM	geom. nl.	$l_1=l_2$	$h_1=h_2$	A_{11}, D_{11}	B_{11}	Iso.	t	Bern.	Timo.
GR	x	-	x	x	x	-	-	x	-	x	-
HS	-	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
CC	x	-	x	∞	-	-	-	x	-	x	-
OP	-	x	x	x	x	-	-	x	x	x	-
LT04	-	x	-	x	x	-	-	x	x	x	-
GUO	x	-	x	x	x	-	-	x	-	x	-
LL	-	x	-	x	x	-	-	x	x	x	-
XZH	x	-	-	-	-	-	-	x	-	x	-
WAH	-	x	-	x	-	x	-	x	x	x	-
REN	x	-	x	-	-	x	-	x	-	x	-
NEV	-	x	-	-	-	x	-	x	x	-	x
YP	-	x	-	-	-	x	x	x	x	-	x
LT09	-	x	x	x	x	x	x	x	x	x	-
JI	-	x	x	-	-	-	-	x	x	x	-
VOR	x	-	x	-	-	x	x	x	x	-	x

Tabelle 3.1: Vergleich verschiedener analytischer Modelle zur Bestimmung der Schnittgrößen.

Abkürzungen: GR: Goland u. Reissner (1944); HS: Hart-Smith (1973b); CC: Cheng et al. (1991); OP: Oplinger (1991); LT04: Luo u. Tong (2004); GUO: Guo et al. (2006); LL: Li u. Lee-Sullivan (2006b); XZH: Zhao et al. (2010); WAH: Wah (1973); REN: Renton u. Vinson (1973); YP: Yang u. Pang (1996); NEV: das Neves et al. (2009); LT09: Luo u. Tong (2009); JI: Jiang et al. (2015); VOR: Vorliegende Arbeit.; Mod. An.: Modellierungsansatz; ÄE: Äquivalente Einzelschicht; MM: Mehrschicht-Modell; geom. nl.: geometrisch nichtlinear; Üb.: Überlappungsbereich; l_1, l_2 : überlappungsfreie Fügeteillänge; h_1, h_2 : Fügeteildicke; A_{11} : Dehnsteifigkeit; D_{11} : Biegesteifigkeit; B_{11} : Biege-Dehn Koppelsteifigkeit; Iso.: Isotrop; Kl.: Klebschicht; t : Klebschichtdicke; Versch. An.: Verschiebungsannahme; Bern.: Bernoulli Kinematik; Timo.: Timoshenko Kinematik.

Die erste geschlossen analytische Spannungslösung für einschnittige Überlappungsklebung stammt von Volkersen (1938). Die Fügeteile werden als biegestarke Stäbe modelliert und für die Klebschicht wird eine vereinfachte kinematische Annahme verwendet. Die technische Gleitung wird als konstant über die Klebschichtdicke angenommen und allein aus der Differenz der Verschiebungen der Fügeteile ermittelt. Da Biegedeformationen vernachlässigt werden, treten nur Normalkräfte und keine Querkkräfte oder Biegemomente auf. Deshalb werden durch diese Art der Modellierung die Schälspannungen in der Klebschicht nicht erfasst und es liegt ein reiner Schubspannungszustand vor.

Goland u. Reissner (1944) modellieren die Fügeteile als Balken mit BERNOULLI-Verschiebungsannahmen. Ihre Modellierungsannahmen sind gültig für einschnittige, ausgeglichene Überlappungsklebung mit isotropen Fügeteilen. Die Spannungslösung für die Klebschicht wird mit einem Mehrschicht-Modell abgebildet. Die hierfür benötigten Schnittgrößen an den

Enden des Überlappungsbereichs werden über ein Modell mit äquivalenten Einzelschichten berechnet. Während im Mehrschicht-Modell keine geometrische Nichtlinearität berücksichtigt werden kann, wird zur Berechnung der Schnittgrößen das geometrisch nichtlineare Verhalten durch das Momentengleichgewicht an der deformierten Struktur abgebildet. Durch dieses Vorgehen werden die aus der Exzentrizität der angreifenden Last hervorgerufenen Biegedeformationen berücksichtigt. Die Biegemomente und Querkkräfte werden mithilfe des sogenannten Biegemomentenfaktors als Funktion der angreifenden Last angegeben. Srinivas (1975) folgt dem Modellierungsansatz von Goland u. Reissner (1944) und erweitert diesen auf gestufte einschnittige Überlappungsklebung und Reparaturklebungen.

Hart-Smith (1973b) erweitert die Analyse von Goland u. Reissner (1944), indem er zur Ermittlung der Schnittgrößen ebenfalls ein Mehrschicht-Modell verwendet. Auch das Verhalten von FKV-Fügeteilen ohne Biege-Dehn-Kopplung kann mit diesem Modell abgebildet werden, jedoch nur für ausgeglichene Überlappungsklebung. Während Goland u. Reissner (1944) zur Ermittlung der Schnittgrößen den Überlappungsbereich als Balken mit doppelter Höhe modellieren wird bei Hart-Smith (1973b) die Klebschichtdicke mit berücksichtigt. Die Fügeteile werden im Überlappungsbereich als einzelne Balken mit BERNOLLI-Verschiebungsannahmen modelliert. Wie bei den meisten Mehrschicht-Modellen wird das geometrisch nichtlineare Verhalten im Überlappungsbereich nicht berücksichtigt. Die Lösung für die Schnittgrößen besitzt demzufolge nur für kurze Überlappungslängen mit relativ dicken Fügeteilen oder für kleine äußere Lasten eine ausreichende Genauigkeit.

Oplinger (1991) entwickelt das Mehrschicht-Modell von Hart-Smith (1973b) durch Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte im Überlappungsbereich weiter. Die Modellierungsannahmen gelten weiterhin nur für ausgeglichene Überlappungsklebung mit isotropen Fügeteilen. Die Ergebnisse für die Schnittmomente liegen zwischen den Vorhersagen von Goland u. Reissner (1944) und Hart-Smith (1973b) wobei die größte Abweichung für kleine Fügeteildicken auftritt. Außerdem kritisiert Oplinger (1991) die Kombination von Mehrschicht-Modellen zur Ermittlung der Klebschichtspannungen mit äquivalenten Einzelschicht-Modellen um die Schnittgrößen zu ermitteln, da die Steifigkeiten im Überlappungsbereich durch die Modellierung mit äquivalenten Einzelschichten überschätzt werden.

Li u. Lee-Sullivan (2006b,a) überarbeiten die Lösungen von Goland u. Reissner (1944), Hart-Smith (1973b) und Oplinger (1991). Sie korrigieren zwei mathematische Fehler in der Herleitung von Hart-Smith (1973b). Darüber hinaus entwickeln sie eine eigene Lösung für die Schnittmomente, die der Lösung von Hart-Smith (1973b) bis auf die Formulierung einer Übergangsbedingung gleicht. Im Ergebnisteil ihrer Arbeit werden die Vorhersagen aller fünf Modelle miteinander verglichen. Zuletzt behaupten Li u. Lee-Sullivan (2006b,a), dass eine Modellierung des geometrisch nichtlinearen Verhaltens im Überlappungsbereich nicht nötig ist, da die Vorhersagen für die untersuchten geometrischen Konfigurationen sich nicht signifikant unterscheiden.

Luo u. Tong (2004) formulieren ebenfalls ein Mehrschicht-Modell nach Hart-Smith (1973b), wobei sie die Annahme konstanter Spannungen über die Klebschichtdicke fallen lassen. Mit diesem Ziel nutzen sie einen linearen Verschiebungsansatz für dünne Klebschichten und einen Verschiebungsansatz höherer Ordnung für Klebschichtdicken bis zu einem Millimeter. Mit diesem Modell können Schnittgrößen für ausgeglichene Überlappungsklebung mit isotropen Fügeteilen bestimmt werden.

Außerdem gibt es für isotrope Fügeteile weitere Modelle auf Basis der äquivalenten Einzelschichten. Guo et al. (2006) untersuchen einschnittige Überlappungsklebung unter Zug- und

Drucklasten. Dabei verwenden sie statt einer gelenkigen Lagerung eine feste Einspannung, um die Gegebenheiten in einer Zugprüfmaschine besser abzubilden. Zhao et al. (2010) nehmen den Überlappungsbereich als starren Körper an. Deshalb ist ihre Analyse nur für kurze Überlappungsbereiche und/oder für Fügeiteile mit hoher Biegesteifigkeit gültig. Vorteilhaft an dieser Art der Modellierung ist, dass nur zwei Teilbereiche modelliert werden müssen. Dies führt auf einen kurzen, einfach zu implementierenden Ausdruck für die Biegemomente. Außerdem muss keine ausgeglichene Klebung vorliegen. Cheng et al. (1991) modellieren ebenfalls eine unausgeglichene Überlappungsklebung. Als Ergebnis geben sie zwei Ausdrücke für die Schnittgrößen an beiden Überlappungsenden an. Eine Einschränkung ist, dass das Ergebnis wegen den durchgeführten Vereinfachungen unabhängig von der überlappungsfreien Fügeiteillänge ist. Daher ist die Analyse nur für sehr lange Fügeiteile gültig.

Modelle für FKV-Fügeiteile wurden seit den 1970er-Jahren entwickelt. Wah (1973) nutzt ein Mehrschicht-Modell, ohne das geometrisch nichtlineare Verhalten im Überlappungsbereich zu berücksichtigen. Außerdem ist das Modell nur für Fügeiteile mit symmetrischem Lagenaufbau, also ohne Biege-Dehnkopplung gültig.

Im Gegensatz dazu stellen Renton u. Vinson (1973, 1975b,a, 1977) ein zweigeteiltes Modell vor. Die Klebschichtspannungen werden mit einem Mehrschicht-Modell berechnet wohingegen die Biegemomente als Randbedingungen aus einem Modell mit äquivalenten Einzelschichten ermittelt werden. Durch die Annahme einer parabolischen Schubspannungsverteilung werden im Mehrschicht-Modell transversale Schub- und Normalspannungen berücksichtigt. Das Modell ist jedoch nur auf ausgeglichene Überlappungsklebung mit symmetrisch laminierten Fügeiteilen ohne Biege-Dehn-Kopplung anwendbar.

Allman (1977) entwickelt ebenfalls ein Mehrschicht-Modell für FKV-Fügeiteile mit symmetrischem Lagenaufbau. Die Schnittgrößen als Übergangsbedingung an den Überlappungsenden werden mit dem Modell von Goland u. Reissner (1944) berechnet, obwohl dieses nur für isotrope Fügeiteile gültig ist.

Zou et al. (2004) erstellen ein Mehrschicht-Modell für ausgeglichene Überlappungsfügungen zwischen FKV-Fügeiteilen mit symmetrischem Lagenaufbau, d.h. $B_{11}=0$. Enthalten sind Übergangsbedingungen für Reparaturpflaster, Versteifungspflaster und für die einschnittige Überlappungsklebung. Für Reparatur- und Versteifungspflaster werden die Übergangsbedingungen mittels globalem Gleichgewicht, ohne Berücksichtigung von nichtlinearem Deformationsverhalten, hergeleitet. Im Gegensatz dazu werden für die einschnittige Überlappungsklebung die Übergangsbedingungen von Cheng et al. (1991) verwendet, obwohl diese nur für isotrope Fügeiteile gelten. Da das geometrisch nichtlineare Verhalten für die Reparatur- und Versteifungspflaster nicht berücksichtigt ist, zeigen die Schälspannungen für diese Konfigurationen keine gute Übereinstimmung mit Ergebnissen von Finite-Elemente-Simulationen. Im Gegensatz dazu ist die Übereinstimmung für die einschnittige Überlappungsklebung gut.

Frostig et al. (1999) verwenden ebenfalls ein Mehrschichten-Modell für FKV-Fügeiteile. Die Herkunft der Übergangsbedingungen ist in dieser Arbeit nicht dokumentiert. Aufbauend auf der Arbeit von Frostig et al. (1999) erstellen das Neves et al. (2009) ein Modell, das Fehlstellen in der Klebschicht abbilden kann. Die einzige Einschränkung ist der symmetrische Lagenaufbau der FKV-Fügeiteile. Geometrisch nichtlineares Verhalten ist nur außerhalb des Überlappungsbereichs berücksichtigt. Die Übergangsbedingungen an den Überlappungsenden werden nicht explizit angegeben.

Radice u. Vinson (2008) erstellen ein Mehrschicht-Modell für FKV-Fügeteile unter Berücksichtigung der Biege-Dehn-Kopplung. Dazu nutzen sie eine Näherungslösung auf Basis des RAYLEIGH-RITZ-Verfahrens. Die transversalen Klebschichtspannungen werden hierbei mit Polynomen bis zur fünften Ordnung angenähert. Die Fügeteile werden als Balken mit TIMOSHENKO-Kinematik modelliert, wobei die Durchbiegungen mit Polynomen höherer Ordnung angenähert werden. Aufgrund der hohen benötigten Anzahl an Termen ergibt sich ein hoher Rechenbedarf.

Yang u. Pang (1996, 1993) modellieren eine einschnittige Überlappungsklebung mit gelenkiger Lagerung. Die Herleitung der Grundgleichungen erfolgt auf Basis der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung für Laminat, wobei der Einfluss der Biege-Dehn-Koppelsteifigkeit nicht vernachlässigt wird. Wie bei den meisten Arbeiten mit Mehrschicht-Modellen wird der Einfluss der transversalen Verschiebung und damit die geometrische Nichtlinearität nur in den überlappungsfreien Bereichen berücksichtigt. Weiterhin wird zur Lösung des Problems ein FOURIER-Reihen-Ansatz für die Schälspannungen gemacht. Insgesamt müssen für die einschnittige Überlappungsklebung mit diesem Mehrschicht-Modell 18 Rand- und Übergangsbedingungen formuliert werden. Hierdurch wird die Lösung sehr aufwendig in der Implementierung.

Luo u. Tong (2009) modellieren die einschnittige Überlappungsklebung ebenfalls mit einem Mehrschicht-Modell unter Berücksichtigung der Biege-Dehn-Kopplung. Sie nutzen die konstitutiven Gleichungen der klassischen Laminattheorie und berücksichtigen das nichtlineare Deformationsverhalten auch für den Überlappungsbereich. Die Modellierungsannahmen lassen eine Lösung des Problems nur für ausgeglichene Überlappungsklebung zu. Luo u. Tong (2009) geben die Schnittmomente als Übergangsbedingungen am Überlappungsbereich explizit an und weisen auf deren Relevanz für die Qualität der Spannungslösung hin.

Ein anderer Ansatz die Schnittgrößen zu bestimmen wird von Zhao u. Lu (2009) und Delale et al. (1981) verfolgt. Diese verwenden lediglich das globale Kräfte- und Momentengleichgewicht. Nichtlineares Deformationsverhalten kann somit nicht abgebildet werden. Deshalb sind die Ergebnisse auch nur für sehr kurze, dicke Fügeteile mit sehr kleinen äußeren Lasten gültig, da in diesen Fällen eine lineare Betrachtung möglich ist.

In einer Veröffentlichung von Silva u. Nunes (2014) werden die Schnittmomente für eine einschnittige Überlappungsklebung experimentell bestimmt. Zur Evaluation der Ergebnisse wurde eine Finite-Elemente-Simulation durchgeführt. Li u. Lee-Sullivan (2001) untersuchen die Schnittmomente an den Überlappungsenden ebenfalls mithilfe der Finite-Elemente-Methode. Dies zeigt das fortwährende Interesse an dieser Größe. Sind die Schnittgrößen bekannt, können sie genutzt werden, um den Rechenaufwand für Finite-Elemente-Modelle zu reduzieren, indem wie bei den Mehrschicht-Modellen nur noch der Überlappungsbereich modelliert wird. Dies ist mit einer linear elastischen Analyse möglich statt mit einer geometrisch nichtlinearen Analyse, die für ein Gesamtmodell nötig wäre, siehe Penado (1998).

Im Kapitel 5 dieser Arbeit wird eine analytische Lösung für die Schnittmomente vorgestellt. Dazu wird ein Modell mit äquivalenten Einzelschichten für FKV-Fügeteile unter Berücksichtigung einer möglichen Biege-Dehn-Kopplung hergeleitet. Geometrisch nichtlineares Verhalten wird in allen Teilen berücksichtigt, auch im Überlappungsbereich. Die geschlossen analytische Lösung ist einfach zu implementieren und zeigt eine gute Übereinstimmung mit der Finite-Elemente-Methode.

3.2 Bestimmung inkrementeller und differentieller Energiefreisetzungsraten

Im Rahmen einer bruchmechanischen Strukturbewertung nimmt die Bestimmung der differentiellen Energiefreisetzungsrate eine zentrale Rolle ein. Beim Übergang zur finiten Bruchmechanik geht der differentielle Rissfortschritt über in eine inkrementelle Rissentstehung. Dabei tritt bei der energetischen Bewertung die inkrementelle Energiefreisetzungsrate an die Stelle der differentiellen Energiefreisetzungsrate. In diesem Abschnitt sollen die gängigen Methoden zur Bestimmung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate vorgestellt und diskutiert werden.

Die einfachste Möglichkeit die inkrementelle Energiefreisetzungsrate zu bestimmen ist, die Änderung des Gesamtpotentials¹ durch die neu entstandene Rissfläche zu teilen. Viele Autoren (beispielsweise Hebel (2010), Carrere et al. (2015), Weißgraeber et al. (2015)) berechnen die Änderung des Gesamtpotentials numerisch. García u. Leguillon (2012) nutzen einen semi-analytischen Ansatz, wobei nur noch eine numerische Simulation zur Ermittlung der Potentialdifferenz nötig ist. Dieser Ansatz ("*asymptotic matching*") kann in Leguillon (1989) oder Yosibash et al. (2006) nachgelesen werden. Ein Nachteil der Berechnung über globale Größen ist, dass sich keine Rissöffnungsmoden trennen lassen.

Ein weiterer Ansatz ist die differentielle Energiefreisetzungsrate zu integrieren, siehe Gleichung (2.108). Liegt die differentielle Energiefreisetzungsrate nach Moden getrennt vor kann auch die inkrementelle Energiefreisetzungsrate nach Moden getrennt integriert werden. Carrere et al. (2015) berechnen die differentielle Energiefreisetzungsrate mit dem modifizierten Risschließintegral numerisch. Cornetti et al. (2012), Reja et al. (2014), Weißgraeber u. Becker (2013) und Stein et al. (2015) berechnen die differentielle Energiefreisetzungsrate analytisch mit einem Mehrschicht-Modell. Um aus den Klebschichtspannungen die Energiefreisetzungsrate berechnen zu können, werden die Formeln von Carpinteri et al. (2009), Lenci (2001) bzw. Krenk (1992) genutzt. Mit diesem Verfahren wird für die schwache Spannungssingularität an der Bi-Materialkerbe zwischen Klebschicht und Füge teil eine differentielle Energiefreisetzungsrate ungleich Null vorhergesagt. Auch wenn dieses Ergebnis den Vorhersagen der Elastizitätstheorie widerspricht, ist die Vorhersagequalität für die inkrementelle Energiefreisetzungsrate als gemittelte Größe ausreichend zur Vorhersage der Versagenslast. Das Verfahren die inkrementelle Energiefreisetzungsrate über Integration der differentiellen Energiefreisetzungsrate zu berechnen, eignet sich sehr gut für finite Risse, die vom Rand ausgehend initiieren und deshalb nur eine Risspitze besitzen. Für Risse, die nicht vom Rand ausgehend initiieren, mit zwei Risspitzen im Inneren, oder für Rissmuster ist die Integration der differentiellen Energiefreisetzungsrate fragwürdig, da der Integrationspfad nicht mehr eindeutig ist.

Liegt lineare Elastizität vor, ist es außerdem möglich, die differentielle Energiefreisetzungsrate über die Spannungsintensitätsfaktoren zu berechnen oder die letzteren direkt im energetischen Teilkriterium zu verwenden. Diesen Ansatz verfolgen Weißgraeber et al. (2016), Cornetti et al. (2006), Leguillon et al. (2003) und Hebel et al. (2010).

Ein lokaler Ansatz die inkrementelle Energiefreisetzungsrate zu berechnen besteht in der Auswertung des Risschließintegrals. Ein Vorteil dieser Technik ist, dass die freigesetzte Energie direkt den Rissöffnungsmoden zugeordnet werden kann und somit das Mixed-Mode-Verhältnis bekannt ist. Für lineare Elastizität untersuchen Hell et al. (2014) den Zusammenhang zwischen

¹beim Übergang von einer ungerissenen Struktur zu einer gerissenen Struktur

der differentiellen und inkrementellen Energiefreisetzungsrate, aufgeteilt nach Rissöffnungsmoden. Hebel u. Becker (2008) und Hebel (2010) geben die Formeln zur Auswertung des Riss-schließintegrals zur Moden-Trennung an, aber berücksichtigen das Mixed-Mode-Verhältnis bei der Auswertung des energetischen Teilkriteriums nicht.

Im Gegensatz zu infinitesimalem Risswachstum unterscheidet sich die Menge an freigesetzter Energie für finite Rissentstehung abhängig davon ob eine Belastung verschiebungsgesteuert oder lastgesteuert aufgebracht wird. Im Fall der lastgesteuerten Aufbringung ist die freigesetzte Energie für einen finiten Riss mit festgelegter Länge etwas höher als für eine verschiebungsgesteuerte Aufbringung der äußeren Last, siehe Rosendahl et al. (2016). Für infinitesimales Risswachstum ist die freigesetzte Energie unabhängig von der Art der äußeren Belastung, siehe Kuna (2013) und Gross u. Seelig (2006). Dies bedeutet, für eine Analyse der Versagenslasten im Rahmen der finiten Bruchmechanik muss die Art der Lastaufbringung exakt modelliert werden, siehe Nairn (2000).

Falls für den finiten Riss zusätzlich zur freigesetzten Energie das Mixed-Mode-Verhältnis berücksichtigt werden soll, existieren in der wissenschaftlichen Literatur verschiedene Ansätze. Zum einen kann das Mixed-Mode-Verhältnis direkt aus der Aufteilung der freigesetzten Energie zu den Rissöffnungsmoden erfolgen, andererseits ist es auch möglich das Mixed-Mode-Verhältnis auf Basis eines Spannungszustandes abzuschätzen. Dabei kann der Spannungszustand der ungerissenen Struktur entlang der Rissflanken ausgewertet werden oder der Spannungszustand an der Rissspitze im gerissenen Zustand. Soll das Mixed-Mode-Verhältnis mit den Energiefreisetzungsraten bestimmt werden, kann entweder die nach Moden getrennte inkrementelle Energiefreisetzungsrate zugehörig zum finiten Riss oder die differentielle Energiefreisetzungsrate der Rissspitze genutzt werden.

Wird der Spannungszustand an der Rissspitze verwendet, kann das Mixed-Mode-Verhältnis definiert werden als Winkel zwischen dem Spannungsvektor und der Normalen auf die zugehörige Schnittfläche. Dabei kann der Spannungsvektor direkt an der Rissspitze oder in einem kleinen Abstand zur Rissspitze ausgewertet werden, wobei mit letzterem Vorgehen eine zusätzliche Längenskala eingeführt wird. Mantič (2009) und Hutchinson u. Suo (1991) verwenden den Spannungszustand in einem kleinen Abstand zur Rissspitze des neu initiierten finiten Risses. Hebel (2010) nutzt den Spannungszustand der ungerissenen Struktur direkt am Kerbgrund.

Alternativ kann das Mixed-Mode-Verhältnis durch die Spannungen entlang der Rissflanken in der ungerissenen Struktur abgeschätzt werden, wie von García u. Leguillon (2012) vorgeschlagen. Dieses Vorgehen ist mit der Idee einer finiten und spontanen Rissentstehung konsistent, da die Spannungen denjenigen entsprechen, welche bei einer gekoppelten Auswertung nach Leguillon et al. (2003) im Spannungsteilkriterium verwendet werden. Da aus den Spannungen entlang der ungerissenen Rissflanken ein Mixed-Mode-Verhältnis für den gesamten finiten Riss ermittelt werden soll, ist unklar, an welcher Stelle die dazu nötige Mittelung geschehen soll. Möglich ist hierbei eine Mittelung auf Ebene der Spannungen, eine Mittelung des Mixed-Mode-Verhältnis selbst oder eine Mittelung bei der Berechnung der effektiven Bruchzähigkeit. Hierbei kann jedes der drei Vorgehen zu sehr unterschiedlichen Endergebnissen führen. García u. Leguillon (2012) führen eine Mittelung bei der Berechnung der effektiven Bruchzähigkeiten durch.

Reja et al. (2014) berechnen das Mixed-Mode-Verhältnis für ein Mehrschicht-Modell mittels differentieller Energiefreisetzungsraten und über den Spannungszustand. Sie zeigen, dass das Mixed-Mode-Verhältnis beider Verfahren für diese Art der Modellierung übereinstimmt.

Der Grund hierfür liegt in der reduzierten Kinematik der Klebschicht bei Mehrschicht-Modellen. Durch diese besteht ein direkter Zusammenhang zwischen den differentiellen Energiefreisetzungsraten und den Spannungen. Die effektive Bruchzähigkeit wird in dieser Arbeit mit dem Modell von Hutchinson u. Suo (1991) bestimmt.

3.3 Versagenslastbewertung von Klebfügungen mit FKV-Fügeteilen

Werden FKV-Strukturen adhäsiv gefügt, ergibt sich eine höhere Komplexität in der Lastübertragung im Gegensatz zu isotropen Fügeteilen. Dies trifft auch auf das Versagensverhalten zu. Während für isotrope Werkstoffe nach Cuntze (siehe Unterabschnitt 2.3) nur zwei Versagensmoden auftreten, erhöht sich die Anzahl für transversal isotrope Einzelschichten entsprechend der unabhängigen Elastizitätskonstanten auf fünf unterschiedliche Versagensmoden. Klebefügungen mit isotropem Stahl oder Aluminium Fügeteilen und einem sprödem Klebstoff versagen meist adhäsiv zwischen Fügeteil und Klebschicht oder kohäsiv in der Klebschicht. Außerdem kann Plastifizierung der Fügeteile auftreten. Die Versagensmoden für Klebefügungen mit FKV-Fügeteilen sind Gegenstand des nächsten Unterabschnitts.

Versagensmoden

In der ASTM Norm D5573 werden sieben unterschiedliche Versagensmoden für Klebefügungen mit FKV-Fügeteilen unterschieden: Adhäsiv-Versagen, Kohäsiv-Versagen, fügeteilnahes Kohäsiv-Versagen, transversales Fügeteil-Versagen, klebschichtnahes transversales Fügeteilversagen, axiales Fügeteil-Versagen oder gemischtes Versagen. In Abbildung 3.2 sind hiervon die vier wichtigsten Versagensmoden abgebildet. Zwei Versagensmoden betreffen die Klebschicht, Adhäsiv-Versagen (ADH) zwischen Klebschicht und Fügeteil und Kohäsiv-Versagen (KOH) innerhalb der Klebschicht. Zusätzlich ist axiales Fügeteil-Versagen (aFV) möglich. Dieses entspricht einem Zugbruch des FKV-Fügeteils an einem Ende des Überlappungsbereichs. Beim transversalen Fügeteil-Versagen (tFV) zeigt sich die Komplexität des Versagensverhaltens von FKV-Fügeteilen. Dieser Versagensmodus entspricht einer Kombination aus Faserbruch und inter- bzw. intralaminarem Versagen. Demzufolge finden sich auf beiden Seiten der Bruchfläche entsprechende Fasermengen.

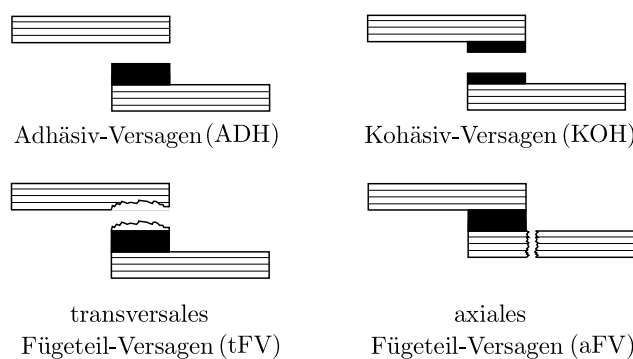


Abbildung 3.2: ASTM Versagensmoden für Klebefügungen mit FKV-Fügeteilen

Für tFV ist unklar, ob die Rissinitiierung intra-/interlaminar stattfindet, mit anschließendem Faserbruch oder ob der Schadensverlauf in umgekehrter Reihenfolge abläuft mit Faserbruch

als Erstschädigung. Das tFV tritt meist schlagartig ein und eine Untersuchung der Bruchflächen lässt nicht auf den Initiierungsmechanismus schließen. Stewart (1997) findet in seinen Experimenten mit Winkelverbunden eine interlaminare Schadensinitiierung, welche zu tFV führt. Die Annahme interlaminarer Rissinitiierung wird durch die Experimente von Roy et al. (1997b) bekräftigt. Der von Stewart (1997) postulierte Schadensverlauf ist in Abbildung 3.3 schematisch dargestellt. Ebenfalls interlaminare Rissinitiierung wird von Ribeiro et al. (2016) beobachtet, aber mit Rissinitiierung an einer anderen Stelle. Der von Ribeiro et al. (2016) postulierte Schadensverlauf, mit interlaminarer Rissinitiierung von der gegenüberliegenden Seite, ist in Abbildung 3.4 schematisch dargestellt.

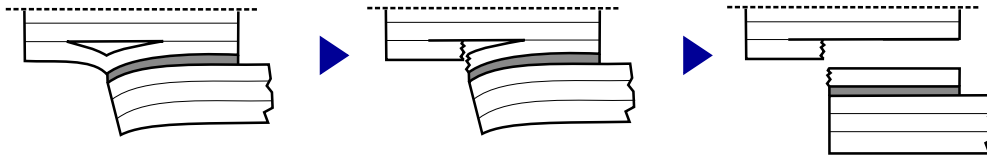


Abbildung 3.3: Schematischer Schadensverlauf für transversales Fügeiteilversagen mit interlaminarer Rissinitiierung und anschließendem Faserbruch, nach Roy et al. (1997b).

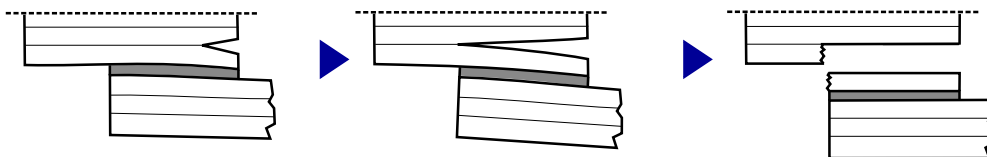


Abbildung 3.4: Schematischer Schadensverlauf für transversales Fügeiteilversagen mit interlaminarer Rissinitiierung und anschließendem Faserbruch, nach Ribeiro et al. (2016).

Des weiteren wird im Zusammenhang mit FKV-Fügeiteilen häufig vor interlaminarem Versagen bzw. Delamination gewarnt². Dies geschieht oft nur als allgemeine Aussage bezüglich Konstruktionen mit Faser-Kunststoff-Verbunden ohne experimentelle Evidenz für den speziellen Anwendungsfall der Überlappungsklebung. In der wissenschaftlichen Literatur gibt es wenige experimentelle Arbeiten zu Überlappungsklebungen, die von interlaminarer Rissinitiierung berichten. Meist werden lediglich die Bruchflächen untersucht und Teilbereiche identifiziert, auf denen interlaminare Versagen stattgefunden hat. Zur Bestimmung der Versagenslast ist es aber unumgänglich den Initiierungsmechanismus zu modellieren. Außerdem können bei Identifikation eines interlaminaren Rissinitiierungsmodus gezielt konstruktive Gegenmaßnahmen getroffen werden, beispielsweise durch Verstärkungen in transversaler Richtung wie Nadeln, Umwickelungen oder durch Vernähen.

Experimentelle Beobachtungen für FKV-Fügeiteile

Häufig werden bei der Untersuchung der Bruchflächen Teilbereiche ausgemacht, auf denen interlaminare Versagen stattgefunden hat, wohingegen der Initiierungsmechanismus unbekannt ist³. In diesen Fällen gibt es drei konkurrierende Initiierungsmechanismen, die Rissentstehung

²Venkayya u. Tischler (1997), da Silva et al. (2009b), Adams et al. (1997), Matthews et al. (1982), Dattaguru et al. (1984), Campilho et al. (2005), Panigrahi u. Pradhan (2007), Banea u. da Silva (2009), Budhe et al. (2017)

³Toftagaard u. Lystrup (2005), Grimes et al. (1972), Reis et al. (2015), Mittal et al. (2015), Li et al. (2015), Akpınar (2013), Park et al. (2010), Song et al. (2010), Nguyen et al. (2009), Seong et al. (2008), Yahya u. Hashim (2014), Adams et al. (1986), Tomblin et al. (2001), Lehman u. Hawley (1969)

entlang des Klebeinterface, Faserbruch direkt an der Bi-Materialkerbe und interlaminares bzw. intralaminares Versagen. Solange der Initiierungsmechanismus nicht bekannt ist müssen diese drei Mechanismen zur Versagenslastvorhersage gegeneinander abgewogen werden.

Ebenfalls wird im Bezug auf interlaminares Versagen teilweise der Rissfortschritt einer initial gerissenen Probe untersucht⁴. Hierbei muss beachtet werden, dass die Position und die Länge des initialen Anrisses einen großen Einfluss auf die experimentelle Versagenslast hat. Eine untere Grenze für die Versagenslast zu finden ist somit mit großem Aufwand verbunden. Außerdem können die so gefundenen Versagenslasten nicht auf die ungerissene Probe übertragen werden, stellen aber einen unteren Grenzwert dar, falls die kritische Rissposition sorgfältig untersucht wird. Weitere in Experimenten vorkommende Versagensmoden sind Rissinitiierung in der Klebschicht teilweise in Kombination mit tFV⁵, tFV mit ungeklärter Rissinitiierung⁶ oder aFV⁷.

Falls sich direkt über der Klebschicht eine 90° oder eine um den Winkel ϑ gedrehte Schicht befindet, kann intralaminare Rissinitiierung mit anschließendem inter- bzw. intralaminarem Rissfortschritt stattfinden⁸. Selten tritt in FKV-Fügeteilen inter- bzw. intralaminare Rissinitiierung über der Bi-Materialkerbe an den Enden des Überlappungsbereichs auf⁹.

Die meisten experimentellen Untersuchungen sind wegen des Lagenaufbaus nicht für eine zweidimensionale Modellierung zugänglich. Eine weitere Problematik bei der Modellierung ist, dass eine große Anzahl an Materialkennwerten bekannt sein muss. Sollen für eine Klebfügung zwischen Faser-Kunststoff-Verbunden unter gemischter Beanspruchung die Versagenslasten für Klebschichtversagen und interlaminares Versagen des FKV-Fügeteils analysiert werden, müssen mindestens sechs Elastizitätsgrößen (E^{Kleber} , ν^{Kleber} , $E_{\parallel}^{\text{FKV}}$, E_{\perp}^{FKV} , $G_{\perp\parallel}^{\text{FKV}}$, $\nu_{\perp\parallel}^{\text{FKV}}$), vier Festigkeitskennwerte (σ_c^{Kleber} , τ_c^{Kleber} , $\sigma_c^{\text{Interlam}}$, τ_c^{Interlam}) und vier bruchmechanische Kenngrößen ($\mathcal{G}_{\text{Ic}}^{\text{Kleber}}$, $\mathcal{G}_{\text{IIc}}^{\text{Kleber}}$, $\mathcal{G}_{\text{Ic}}^{\text{Interlam}}$, $\mathcal{G}_{\text{IIc}}^{\text{Interlam}}$) zur Auswertung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums bekannt sein. Besonders die bruchmechanischen Kenngrößen und die interlaminaren Festigkeitskennwerte sind häufig nicht in der Literatur verfügbar.

Von den oben aufgelisteten experimentellen Untersuchungen sind nur die Arbeiten von Ribeiro et al. (2016), Neto et al. (2012) und Kim et al. (2006) zur Validierung eines 2D-Modells mit interlaminarem bzw. Klebschichtversagen geeignet. Nur für diese Arbeiten sind die Materialparameter weitestgehend bekannt und die Versagensinitiierung ist als interlaminar dokumentiert. Bei Kim et al. (2006, 2008) wird zwar 100% intralaminares Versagen in der

⁴Sridharan (2008), Fernlund u. Spelt (1991), Cheuk u. Tong (2002), Tong (1998), Qin u. Dzenis (2001), Rhee u. Chi (2001)

⁵Kim et al. (2006), Liljedahl et al. (2006), Campilho et al. (2013), Santosh u. Kiran (2012), Lee et al. (2009), Zeng u. Sun (2001), Matsuzaki et al. (2008b,a), Aymerich et al. (2005), Quaresimin u. Ricotta (2006a), Melograna u. Grenestedt (2002), Tong et al. (1998), Chang et al. (2006), Glaessgen et al. (2002), Ozel et al. (2014), Vijaya Kumar et al. (2013), Renton u. Vinson (1975b), Lehman u. Hawley (1969), Matthews u. Tester (1985), Anyfantis u. Tsouvalis (2012), da Silva u. Adams (2007), Apalak et al. (2006), Thomas et al. (1998), Sheppard (1996), Haruna et al. (1996), Parker (1994)

⁶Kairouz u. Matthews (1993), Tong (1998), Bak et al. (2016), Rahman u. Sun (2014), Lee et al. (2009), Taib et al. (2006), Avila u. Bueno (2004), Vallée et al. (2006), Potter et al. (2001), Tong (1997), Roy et al. (1997a), Tomblin et al. (2002), Purimpat et al. (2013), Campilho et al. (2008), Sheppard (1996), Matthews u. Tester (1985), Hart-Smith (1973a,b)

⁷Cheuk u. Tong (2002), Quaresimin u. Ricotta (2006a)

⁸Kairouz u. Matthews (1993), Zeng u. Sun (2001), Purimpat et al. (2013), Apalak et al. (2006), Thomas et al. (1998)

⁹Ribeiro et al. (2016), Neto et al. (2012), Kim et al. (2006), Adams u. Mallick (1993), Yu et al. (2012), Stewart (1997), Roy et al. (1997b), Apalak et al. (2006)

ersten Schicht parallel zur Klebschicht postuliert, die Bruchfläche zeigt aber transversales Füge-teilver-sagen und die Schadensinitiierung ist nicht dokumentiert.

Nach diesem Überblick über die experimentellen Arbeiten zu einschnittigen Überlappungskle-bungen mit Laminat-Füge-teilen werden im nächsten Unterabschnitt Methoden zur Versa-gensbewertung vorgestellt.

Festigkeits- und bruchmechanische Kriterien zur Bewertung von Klebefügungen mit Füge-teilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden

An den Bi-Materialkerben der Überlappungsklebung treten schwache Spannungssingularitäten mit formal unendlichen Spannungen auf. Trotzdem wurden historisch zuerst Festigkeitskrite-rien angewendet, obwohl diese streng genommen nur für einen homogenen Spannungszustand gelten. Hart-Smith (1973b) und Rodríguez et al. (2012) verwenden beispielsweise ein Haupt-normalspannungskriterium. Andere spannungsbasierte Kriterien werden von Charalambides et al. (1997), Adams et al. (1986), Harris u. Adams (1984) angewendet. Außerdem wurden Festigkeitskriterien entwickelt, die auf die Struktursituation der Überlappungsklebung ange-passt wurden wie beispielsweise von Schlimmer (1982). Vergleichsstudien für die Bewertung von Überlappungskle-bungen mit Festigkeitskriterien wurden von Goglio et al. (2008) oder da Silva et al. (2009a,b) durchgeführt. In diesen Untersuchungen wurde festgestellt, dass die Versagenslastbewertung mit Festigkeitskriterien Defizite aufweist. Dies trifft besonders auf die korrekte Abbildung des Klebschichtdickeneffekts zu, einem Zusammenhang, der mit steigender Klebschichtdicke sinkende Versagenslasten liefert. Einige Autoren verwenden Fest-igkeitskriterien ebenfalls für eine interlamina-re Versagensbewertung, obwohl auch hier direkt über der Bi-Materialkerbe starke Spannungskonzentrationen vorherrschen (Kim et al. (2008), Rahman u. Sun (2014), Nguyen et al. (2009), Zeng u. Sun (2001), Tong (1997), Panigrahi u. Pradhan (2008), Huang et al. (2002)).

Eine Möglichkeit die Auswertung des Festigkeitskriteriums direkt am Punkt der Spannungssin-gularität bzw. am Maximalwert der Spannungskonzentration zu umgehen ist eine nicht-lokale Auswertung der Kriterien. In diesem Zusammenhang wurden speziell die Theorien kritischer Distanzen (Taylor (2007)) auf Klebfügungen angewendet. Bei der punkweisen Auswertung (PM), aus dem Englischen "point method", wird das Spannungskriterium an einem Punkt in einer gewissen Entfernung von der Spannungskonzentration ausgewertet. Dieses Verfahren wurde von John et al. (1991), Haruna et al. (1996), Ribeiro-Ayeh u. Hallström (2003), Engel-stad u. Actis (2003), Rahman u. Sun (2014), Lai et al. (1996) und Clark u. McGregor (1993) angewendet. Überdies können die Festigkeitskriterien noch mit gemittelten Größen über ein Volumen (VM), eine Fläche (AM) oder entlang einer Linie (LM) ausgewertet werden. Allen nicht-lokalen Methoden gemeinsam ist, dass zur Auswertung eine kritische Länge angegeben werden muss, die keinen Materialparameter darstellt und so für jede Struktursituation neu angepasst werden muss.

Für Riss-spitzen-singularitäten stellt die Bruchmechanik sinnvolle Versagenskriterien bereit. Versagen wird als Rissfortschritt eines initial vorhandenen Anrisses beschrieben. Die Versagens-kriterien werden mit Energiefreisetzungs-raten oder Spannungsintensitätsfaktoren aufgestellt. Die größte Einschränkung stellt bei diesem Vorgehen die Annahme des initialen Anrisses dar. Falls dieser nicht vorhanden ist, wie beispielsweise in einer ungeschädigten Struktur, kann ein virtueller Riss eingefügt werden, um wieder auf die Methoden der Bruchmechanik zurückgreifen zu können. Die Methode virtueller Risse wurde von vielen Autoren für die

Bewertung von Klebschichtversagen eingesetzt (Anderson u. DeVries (1987, 1989), Reedy Jr. (2000), Quaresimin u. Ricotta (2006b), Kim u. Lee (2008), Kairouz u. Matthews (1993), Panigrahi u. Pradhan (2007)). Zur bruchmechanischen Bewertung von interlaminarem Versagen von FKV-Fügeteilen wird von einigen Autoren über der Bi-Materialkerbe ein virtueller interlaminarer Riss eingefügt (Panigrahi (2013), Parida u. Pradhan (2014), Qin u. Dzenis (2003)). Ebenso wie bei den nicht-lokalen Festigkeitskriterien ist die virtuelle Risslänge eine zu bestimmende kritische Länge, die keinen Materialparameter darstellt und somit ebenfalls für jede Struktursituation neu bestimmt werden muss. Falls der interlaminare Anriss nicht vom Rand ausgehend initiiert, ist neben der Risslänge auch noch die Position des Risses eine zu bestimmende kritische Größe.

Eine weitere Möglichkeit der Versagensbewertung stellt die Schädigungsmechanik (SM) bzw. die Kohäsivzonenmodellierung (KZM) oder die erweiterte Finite-Elemente-Methode (XFEM) dar. Diese Methoden werden hauptsächlich im Rahmen der Finite-Elemente-Methode umgesetzt. Ein Vorteil dieser Art der Modellierung ist, dass kein initialer Anriss nötig ist. Versagen wird als kontinuierlicher Schädigungsprozess durch ein entsprechendes Schädigungsgesetz abgebildet. Im Fall der klassischen Schädigungsmechanik werden spannungs- oder verzerrungsbasierte Kriterien im Schädigungsgesetz genutzt. Im Schädigungsgesetz wird beschrieben, wie die Elastizitätsgrößen degradiert werden oder es wird eine kritische Größe für ein geschädigtes Volumen festgelegt (Apalak u. Engin (2004), Apalak et al. (2006), Hühne et al. (2010), Olmedo u. Santiuste (2012), Sheppard et al. (1998)). Für die Kohäsivzonenmodellierung und die erweiterte Finite-Elemente-Methode werden im Schädigungsgesetz ein Festigkeits- und ein Energiekriterium genutzt. Dies wurde für die Kohäsivzonenmodellierung von Kafkalis u. Thouless (2002), Sørensen u. Kirkegaard (2006), Liljedahl et al. (2006), Stigh et al. (2010), Pinto et al. (2014), Rocha u. Campilho (2017) umgesetzt und für die erweiterte Finite-Element-Methode von Campilho et al. (2011b,a), Mubashar et al. (2014), Fernandes et al. (2015). Für die Kohäsivzonenmodellierung muss der mögliche Risspfad im Vorhinein bekannt sein. Deshalb ist diese Methode vorwiegend für interlaminares Versagen bzw. Versagen an Grenzflächen vorteilhaft. Nachteilig wirkt sich aus, dass in jedem Fall eine nichtlineare Analyse durchgeführt werden muss. Außerdem muss ein gewisses Maß an Dämpfung im Schädigungsgesetz eingeführt werden, um die Konvergenz der Finite-Elemente-Rechnungen sicherzustellen. Die Höhe der Dämpfung muss sorgfältig gewählt werden, da der Dämpfungsmechanismus Energie dissipiert. Dies kann zu unphysikalisch hohen Versagenslasten führen. Eine Zusammenfassung der Methoden befindet sich in da Silva u. Campilho (2012).

Klassische Festigkeitskriterien auf der einen Seite gelten streng genommen nur für homogene Spannungsfelder. Bruchmechanische Kriterien auf der anderen Seite gelten nur für Struktursituationen mit initialem Anriss. Mit dem von Leguillon (2002) postulierten gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der von Hashin (1996) formulierten finiten Bruchmechanik ist es möglich auch Spannungskonzentrationen bzw. Struktursituationen mit formal unendlichen Spannungen zu bewerten. Dazu muss sich die zu untersuchende Struktursituation spröde verhalten. Dieses Kriterium wurde von vielen Autoren erfolgreich zur Vorhersage der Versagenslast für Klebschichtversagen angewandt (Leguillon et al. (2003), Weißgraeber u. Becker (2011), Cornetti et al. (2012), Moradi et al. (2013), Weißgraeber u. Becker (2013), Hell et al. (2014), Carrere et al. (2015), Stein et al. (2015), Weißgraeber et al. (2015), Weißgraeber et al. (2015), Henninger u. Leguillon (2007), Mendoza-Navarro et al. (2013)). Außerdem konnte mit dem gekoppelten Kriterium zum ersten Mal der Klebschichtdickeneffekt modelliert werden.

Kapitel 4

Finite-Elemente-Modellierung der einschnittigen Überlappungsklebung

In diesem Kapitel wird die Finite-Elemente-Modellierung der einschnittigen Überlappungsklebung vorgestellt und erste Voruntersuchungen durchgeführt. Im Rahmen der Finite-Elemente-Modellierung werden zwei Ansätze zur Versagensbewertung interlaminarer Rissinitiierung verglichen. Die Kohäsivzonenmodellierung wird als Referenzlösung für die Versagenslasten und zugehörigen Rissmuster benötigt. Das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium wird in Kapitel 7 dieser Arbeit erstmals auf interlaminare Rissinitiierung in Überlappungsklebungen mit FKV-Fügeteilen angewandt. Außerdem wird die Finite-Elemente-Modellierung als Referenzlösung zum Vergleich der Schnittgrößen in Kapitel 5 und für die Auswertungen des Rissöffnungsintegrals in Kapitel 6 genutzt.

Struktursituation

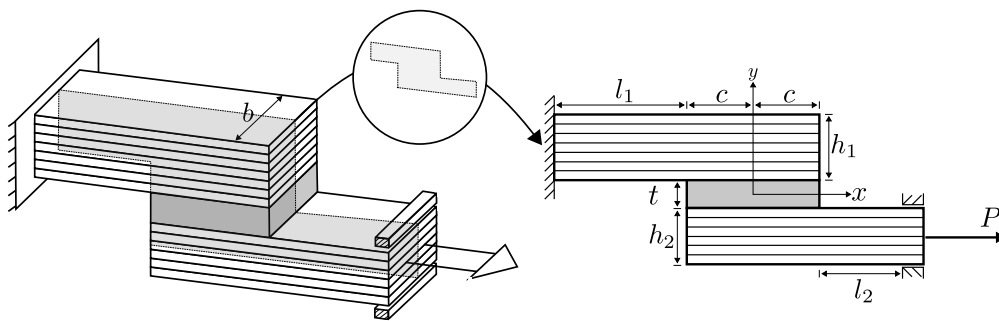


Abbildung 4.1: Geometrie der einschnittigen Überlappungsklebung: Überlappungslänge $2c$, Klebschichtdicke t , überlappungsfreie obere Fügeteillänge l_1 , obere Fügeteildicke h_1 , überlappungsfreie untere Fügeteillänge l_2 , untere Fügeteildicke h_2 , äußere Last P .

In Abbildung 4.1 ist dargestellt wie aus der im allgemeinen dreidimensionalen Struktursituation ein 2D-Finite-Elemente-Modell unter der Annahme des ebenen Verzerrungszustandes abgeleitet wird. Außerdem sind die Parameter aufgelistet, welche die einschnittige Überlappungsklebung charakterisieren. Wegen der Reduzierung in einer Raumdimension ist der Lagenwinkel der Einzelschichten nicht mehr beliebig. Beide Fügeteile können aus einer beliebigen Anzahl orthotroper und isotroper Schichten aufgebaut werden. Die Finite-Elemente-Modellierung wird mit Hilfe des Softwarepakets Abaqus 6.16 von Dassault Systemes erstellt. In allen Finite-Elemente-Berechnungen wird die bei einer einschnittigen Überlappungsklebung vorliegende geometrische Nichtlinearität vollständig berücksichtigt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei verschiedene Modellierungsansätze zur Bewertung von interlaminarer Rissinitiierung in einschnittigen Überlappungsklebungen mit FKV-Fügeteilen verglichen. Dies ist zum einen die Kohäsivzonenmodellierung und zum anderen das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium. Da beide Modellierungsansätze unterschiedliche Anforderungen an die Diskretisierung des Finite-Elemente-Modells besitzen, müssen für beide Ansätze Voruntersuchungen durchgeführt werden, damit die schlussendlich berechneten Versagenslasten unabhängig von nichtphysikalischen Größen sind.

4.1 Voruntersuchungen zur Kohäsivzonenmodellierung

In der vorliegenden Arbeit wird die Kohäsivzonenmodellierung mit EVZ-Viereckselementen (CPE4 in Abaqus 2016) mit linearem Ansatzfunktionen und Kohäsivzonenelementen (COH2D4 in Abaqus 2016) mit ebenfalls linearen Ansatzfunktionen durchgeführt. Bei der Kohäsivzonenmodellierung werden Kohäsivzonenelemente mit verschwindend kleiner Dicke entlang potentieller Risspfade eingefügt. Im Fall der einschnittigen Überlappungsklebung mit FKV-Fügeteilen sind dies die in Abbildung 4.2 mit rot markierten Bereiche.

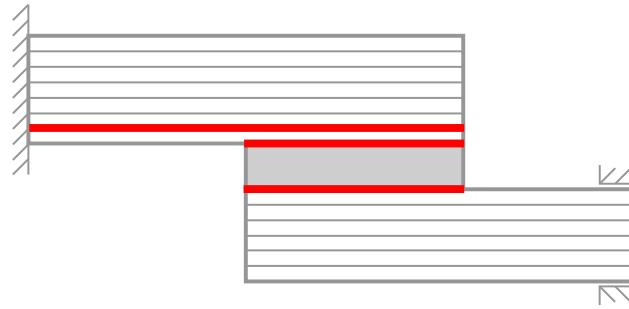


Abbildung 4.2: Kohäsivzonenmodellierung: Die rot markierten Bereichen zeigen die potentiellen Risspfade für eine einschnittigen Überlappungsklebung mit FKV-Fügeteilen.

Entlang der Grenzschichten zwischen den Fügeteilen und der Klebschicht liegen potentielle Risspfade um den Fall des adhäsiven Versagens (ADH) abbilden zu können. Zwischen der ersten und zweiten Einzelschicht des oberen FKV-Fügeteils liegen ebenfalls potentielle Risspfade, um interlaminare Rissbildung und somit transversales Fügeteilversagen (tFV) abbilden zu können. In den Kohäsivzonenelementen verknüpft ein bilineares Spannungs-Separationsgesetz die Verschiebungen der Knoten entlang der neu entstehenden Rissflanken mit den daraus resultierenden Spannungen. Im ungeschädigten Zustand beschreibt das Materialgesetz ein linear-elastisches Materialverhalten bis zum Erreichen eines Schadensinitiierungskriteriums. Da für Überlappungsklebungen entlang aller potentiellen Risspfade mit einer gemischten Beanspruchungen zu rechnen ist, wird in dieser Arbeit das folgende Schadensinitiierungskriterium vorgesehen:

$$\left(\frac{\langle \sigma_n \rangle}{\sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{ns}}{\tau_c} \right)^2 = 1. \quad (4.1)$$

Da im elastischen Bereich des Materialgesetzes durch die Kohäsivzonenelemente keine zusätzliche Nachgiebigkeit in das Finite-Elemente-Modell eingebracht werden soll, wird die Steifigkeit in diesem Bereich auf den von Gonçalves et al. (2000) vorgeschlagenen Wert von 10^6 N/mm^3

gesetzt. Ist das Schadensinitiierungskriterium erreicht, erfolgt eine Degradation der Steifigkeit bis über die betroffenen Kohäsivzonenelemente keine Spannung mehr übertragen werden kann. Wenn dieser Zustand erreicht ist, ist auch das zugrunde liegende energetische Kriterium erfüllt:

$$\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_c} = 1, \quad (4.2)$$

wobei für den Fall einer gemischten Beanspruchung eine effektive Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c mit den Formeln (2.98) oder (2.99) berechnet werden kann.

Eine Besonderheit bei der Kohäsivzonenmodellierung besteht darin, dass die charakteristische Kohäsivzonenelementlänge e_{size} und der viskose Regulierungsparameter η zur Verbesserung der Konvergenzeigenschaften mittels einer Parameterstudie identifiziert werden müssen. Im Folgenden wird die Parameterstudie für eine Struktursituation aus Neto et al. (2012) mit $2c=80$ mm beispielhaft vorgestellt. Außerdem wird die Kohäsivzonenelementlänge der Parameterstudie mit den Elementlängen aus Abschätzungen wie sie in der Literatur verwendet werden verglichen. In der Parameterstudie zur Elementlänge und des Regulierungsparameters

Tabelle 4.1: Übersicht der Konfigurationen in Abbildung 4.3

	e_{size} in mm	η in s	Rechenzeit in min
1	0,1	$2 \cdot 10^{-4}$	6,3
2	0,1	$2 \cdot 10^{-5}$	10,2
3	0,1	$2 \cdot 10^{-6}$	12,2
4	0,05	$2 \cdot 10^{-5}$	36,4
5	0,05	$2 \cdot 10^{-6}$	40,8
6	0,025	$2 \cdot 10^{-7}$	502,5

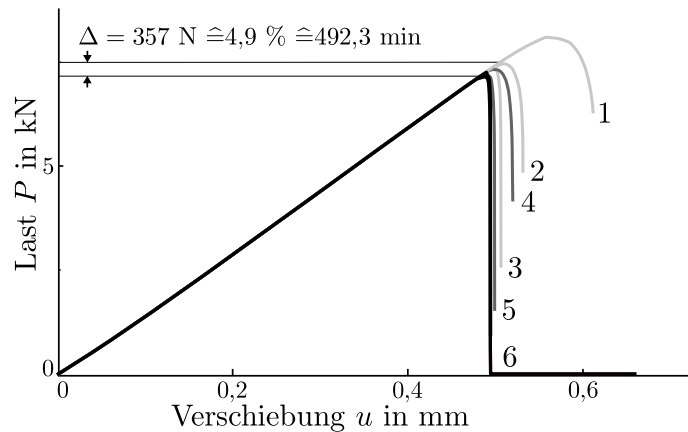


Abbildung 4.3: Konvergenzuntersuchung: Konfiguration aus Neto et al. (2012) mit $2c=80$ mm.

wurden alle Parameterkombinationen $e_{\text{size}}=\{0,1 \text{ mm}, 0,05 \text{ mm}, 0,025 \text{ mm}\}$ und $\eta=\{2 \cdot 10^{-4} \text{ s}, 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}, 10^{-5} \text{ s}, 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}, 2 \cdot 10^{-7} \text{ s}\}$ untersucht. Als Zielgröße zur Feststellung konvergenten Verhaltens wurde die Versagenslast gewählt. In Abbildung 4.3 ist der Übersichtlichkeit halber nur ein Teil der Ergebnisse abgebildet. Die auskonvergierte Referenzkonfiguration kann mit einer Elementkantenlänge $e_{\text{size}}=0,025$ mm und einer Viskosität $\eta=10^{-7}$ s angegeben werden. Diese Parameterkonfiguration führt zu einer Rechenzeit von über acht Stunden.

	E_y in MPa	\mathcal{G}_c in N/mm	σ_c in N/mm ²	$e_{\text{size}}^{\text{max}}$ in mm
XNR6823	2600	1,18	57,0	0,02-0,47
AV138	4890	0,34	39,5	0,02-0,54
Texipreg	8819	0,24	20,0	0,11-2,65

Tabelle 4.2: Maximale Elementkantenlänge der Kohäsivzonenelemente in der Entfestigungszone für die in dieser Arbeit verwendeten Materialien. Für die beiden Klebstoffsysteme ist Kohäsivversagen betrachtet und für den FKV-Werkstoff Texipreg interlaminares Versagen.

Für $e_{\text{size}}=0,1$ mm und $\eta=10^{-5}$ s reduziert sich die Rechenzeit auf zehn Minuten, wobei die Versagenslast um 4,9% überschätzt wird. Als Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit wird in der vorliegenden Arbeit $e_{\text{size}}=0,05$ mm und $\eta=2 \cdot 10^{-6}$ s gewählt. Dies führt zu einer Überschätzung der Versagenslasten von weniger als 1% mit einer Reduktion der Rechenzeit um über 90% gegenüber der Referenzkonfiguration. Außerdem wird durch die gewählten Einstellungen sichergestellt, dass die durch Regularisierung dissipierte Energie unter 1% der Gesamtenergie liegt. Im Abaqus-Benutzerhandbuch von Dassault Systemes wird ein Wert von 5% als ausreichend bezeichnet. Wird der Wert für den Regularisierungsparameter zu groß gewählt, führt dies zu einer künstlichen Erhöhung der Bruchzähigkeit und folglich zu einer erhöhten Versagenslast.

Im Folgenden soll die so bestimmte Elementkantenlänge mit Abschätzungen aus der Literatur verglichen werden. Diese Abschätzungen basieren auf den Materialkonstanten des Kohäsivzonenmaterials, siehe Turon et al. (2007) und Harper u. Hallett (2008). In einem ersten Schritt wird die Länge des Entfestigungsbereichs mit folgender Beziehung abgeschätzt:

$$l_{cz} = c_{cz} \frac{E \mathcal{G}_c}{\sigma_c^2} \quad (4.3)$$

Hierbei ist E der Elastizitätsmodul, \mathcal{G}_c die Bruchzähigkeit und σ_c ein entsprechender Festigkeitswert. Außerdem wird in Turon et al. (2007) und Harper u. Hallett (2008) angemerkt, dass je nach Autor noch eine Konstante $c_{cz}=0.21 \dots 1.00$ eingeführt wird. Nun wird in unterschiedlichen Quellen gefordert, dass mindestens $N_e=2 \dots 10$ Elemente im Entfestigungsbereich liegen müssen, um die Rissbildung im Entfestigungsbereich richtig abbilden zu können. Hieraus lässt sich die nötige Elementkantenlänge angeben als:

$$e_{\text{size}} = \frac{l_{cz}}{N_e} = \frac{c_{cz}}{N_e} \frac{E \mathcal{G}_c}{\sigma_c^2}. \quad (4.4)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass durch die unterschiedlichen Angaben von c_{cz} und N_e der Vorfaktor $c_{cz}/N_e=0.021-0.5$ in Gleichung (4.4) willkürlich erscheint. Die resultierenden Elementkantenlängen für die in dieser Arbeit verwendeten Materialien, siehe in Anhang A, sind in Tabelle 4.2 aufgelistet. Der Vergleich mit den Elementkantenlängen aus der Parameterstudie zeigt, dass die für eine Konvergenz der Versagenslast nötige Elementkantenlänge im unteren Bereich der Abschätzung von Turon et al. (2007) bzw. Harper u. Hallett (2008) liegt.

4.1.1 Inverse Materialdatenbestimmung

Die mechanischen Eigenschaften der einzelnen Klebstoffe sind weitestgehend der Literatur entnommen. Die entsprechenden Materialkennwerte und die zugehörigen Quellenangaben sind in

Tabelle 4.3: Festigkeitswerte und Bruchzähigkeiten für Texipreg HS 160 RM wie sie von verschiedenen Autoren verwendet werden. Der in dieser Arbeit verwendete Wert von $\tau_c = 60,0$ MPa stammt aus dem Materialdatenblatt der Herstellerfirma.

		Neto et al. (2012)	Ribeiro et al. (2016)	Talmon (2018)
σ_c	MPa	25,0	25,0	20,0
τ_c	MPa	13,5	25,0	60,0
\mathcal{G}_{Ic}	N/mm	0,33	0,18	0,24
\mathcal{G}_{IIc}	N/mm	0,79	0,5	0,7

Anhang A in Tabelle 4.3 aufgelistet. Nur für den FKV-Werkstoff Texipreg HS 160 RM konnten keine interlaminaren Festigkeiten und Bruchzähigkeiten ermittelt werden. Deshalb werden die interlaminaren Festigkeiten und Bruchzähigkeiten invers bestimmt. Die interlaminare Schubfestigkeit $\tau_c = 60,0$ MPa kann als einziger Festigkeitskennwert aus dem Materialdatenblatt des Herstellers Seal Italy (2000) entnommen werden. Für die restlichen Versagensparameter ($\sigma_c, \mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}$) werden für eine große Anzahl an Parameterkombinationen Versagenslastvorhersagen bestimmt. Als experimentelle Grundlage dienen die $n=4$ Konfigurationen aus den Untersuchungen von Ribeiro et al. (2016). Um eine bestmögliche Parameterkombination zur Versagenslastvorhersage zu ermitteln, wird eine Minimierung der relativen Abweichung

$$\Delta_{\text{Vor}}(\sigma_c, \mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{f,\text{Exp}}^i - P_{f,\text{Vor}}^i(\sigma_c, \mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc})}{P_{f,\text{Exp}}^i} \right)^2} \quad (4.5)$$

durchgeführt, wobei $P_{f,\text{Exp}}^i$ und $P_{f,\text{Vor}}^i$ die jeweilig experimentell ermittelten und vorhergesagten Versagenslasten darstellen. Als Ergebnis der Minimierung kann als bestmögliche Parameterkombination $\sigma_c = 20,0$ MPa, $\mathcal{G}_{Ic} = 0,24$ N/mm und $\mathcal{G}_{IIc} = 0,70$ N/mm mit einer minimalen relativen Abweichung von $\Delta_{\text{Vor,min}}^{\text{Rib}} = 0,05$ angegeben werden. Die relative Abweichung der experimentellen Datengrundlage kann bei diesem Verfahren als Indikator für die Qualität der ermittelten Versagensparameter verwendet werden. Mit

$$\Delta_{\text{Exp}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta P_{f,\text{Exp}}^i}{P_{f,\text{Exp}}^i} \right)^2} \quad (4.6)$$

ergibt sich für die experimentellen Werte $\Delta_{\text{Exp}}^{\text{Rib}} = 0,06$, wobei $\Delta P_{f,\text{Exp}}^i$ die jeweilige Streuung der Versuchsergebnisse bezeichnet. Die resultierenden Festigkeiten und Bruchzähigkeiten sind in Tabelle 4.3 aufgelistet und mit den Materialdaten anderer Autoren verglichen. Im Folgenden sollen die bestimmten Versagensparameter eingeordnet werden. O'Brien (1998) zeigt, dass die interlaminare Bruchzähigkeit für Modus II diejenige für Modus I immer überschreitet, $\mathcal{G}_{IIc} \geq \mathcal{G}_{Ic}$. Für spröde Matrixharze kann das Verhältnis 2:1 überschreiten, während das Verhältnis für zäh-modifizierte Harze zwischen 2:1 und 1:1 liegt. Dieser Zusammenhang wird von den ermittelten Bruchzähigkeiten eingehalten. Weiterhin ist aus Experimenten ein Zusammenhang zwischen der interlaminaren Bruchzähigkeit und der Bruchzähigkeit des verwendeten Harzes bekannt. Für spröde Harze ist die interlaminare Bruchzähigkeit \mathcal{G}_{Ic} 2-3 mal höher als für das Ausgangsmaterial. Für zäh-modifizierte Harze kann die interlaminare Bruchzähigkeit unter derjenigen des Ausgangsmaterials liegen, siehe Madhukar u. Drzal (1992). Typische interlaminare Bruchzähigkeiten für spröde Harze liegen bei $\mathcal{G}_{Ic} = 0,16 - 0,24$ N/mm für Rissfortschritt und $\mathcal{G}_{Ic} = 0,1 - 0,13$ N/mm für Rissinitiierung, siehe Davies et al. (1992). Verglichen mit diesen Werten liegen die ermittelten Bruchzähigkeiten im Rahmen der für

ein Epoxidharz zu erwartenden Werte. Dies gilt auch für die ermittelten interlaminaren Festigkeitswerte, verglichen mit den Angaben aus Schürmann (2005).

4.1.2 Rissmuster

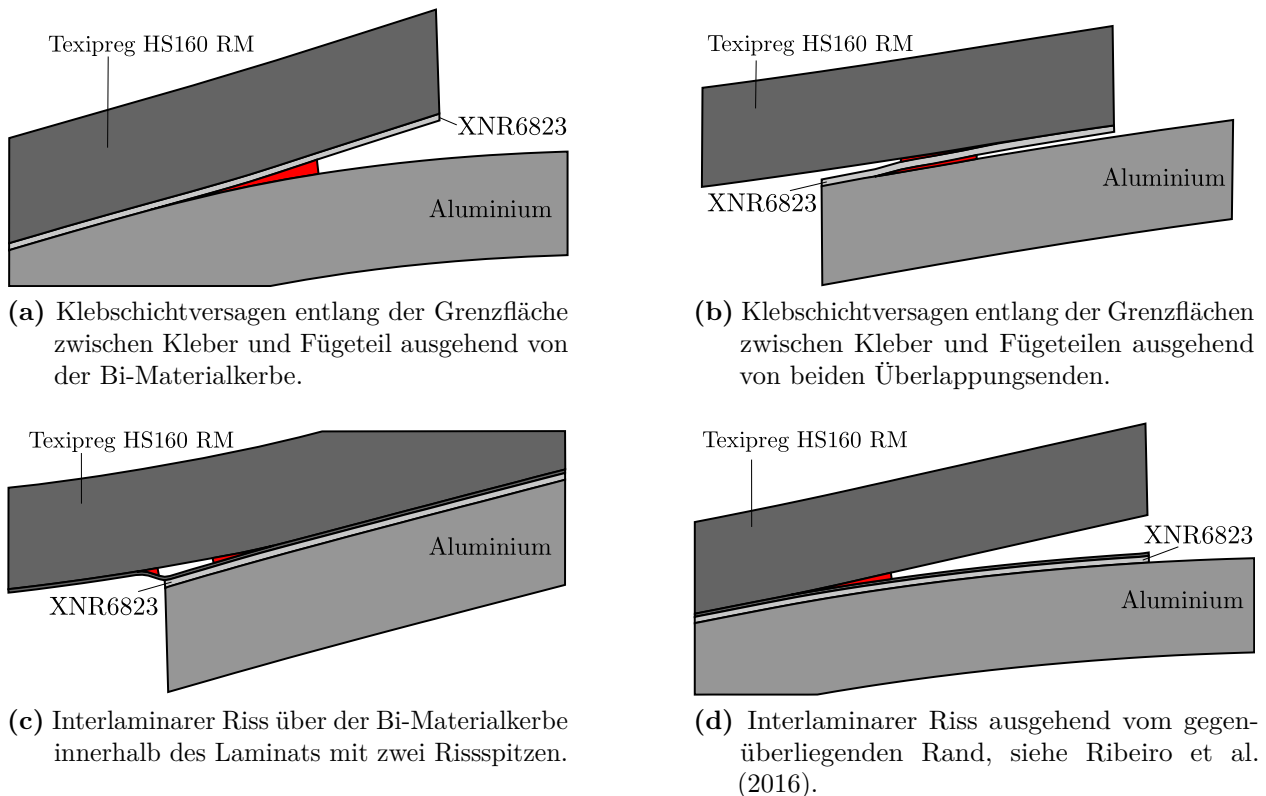


Abbildung 4.4: In der Kohäsivzonenmodellierung für die Struktursituationen von Ribeiro et al. (2016) treten vier Risskonfigurationen auf. Hiervon ist das Rissmuster aus Abbildung 4.4b für eine Überlappungslänge von $2c=10$ mm versagenslastbestimmend und das Rissmuster aus 4.4d für Überlappungslängen $2c=20 - 40$ mm. Ebenfalls möglich ist ein kombiniertes auftreten der interlaminaren Risskonfigurationen. Die rot markierten Bereiche stellen Kohäsivzonenelemente im Entfestigungsbereich dar. Alle Deformationen sind für einen Skalierungsfaktor $x=1,0$ and $y=10,0$ dargestellt.

Im Folgenden sollen noch die möglichen Rissmuster, die während einer Kohäsivzonenmodellierung auftreten können, vorgestellt werden. Diese sind in Abbildung 4.4 dargestellt. In Abbildung 4.4a ist das typische Klebschichtversagen gezeigt, mit einem Riss entlang der Grenzfläche zwischen Kleber und Füge­teil ausgehend von der Bi-Materialkerbe. Ein weiterer Versagensmodus für die Klebschicht, mit zwei Rissen entlang der Grenzflächen zwischen Kleber und Füge­teilen, kann für sehr kurze Überlappungslängen auftreten. Für den Kleber XNR6823 treten für $2c=10$ mm bei Erreichen der Versagenslast die abgebildeten zwei Risse auf, die gemeinsam den gesamten Überlappungsbereich überspannen. Beide Risse gehen von den Bi-Materialkerben an den Überlappungsenden aus. Dieses Rissmuster, Abbildung 4.4b, wird als Durchreißen der Klebschicht klassifiziert und wird in Kapitel 7 näher betrachtet. Für interlaminares Versagen treten ebenfalls zwei unterschiedliche Risstypen auf. In Abbildung 4.4c ist interlaminare Rissinitiierung über der Bi-Materialkerbe gezeigt. Dieser Risstyp initiiert

N_e	$\sigma_y(x=1/3t)$	$\Delta\sigma_y/\sigma_y^{N_e=64}$	$\bar{\mathcal{G}}(a=1/3t)$	$\Delta\bar{\mathcal{G}}/\bar{\mathcal{G}}^{N_e=64}$	$\Delta P_f/P_f^{N_e=16}$
4	75,4150 MPa	1,50 %	0,3945 N/mm	4,3 %	1,0 %
8	75,6925 MPa	1,10 %	0,4016 N/mm	2,6 %	0,3 %
16	76,1578 MPa	0,50 %	0,4068 N/mm	1,3 %	0,0 %
32	76,5378 MPa	0,01 %	0,4101 N/mm	0,5 %	-
64	76,5456 MPa	0,00 %	0,4123 N/mm	0,0 %	-

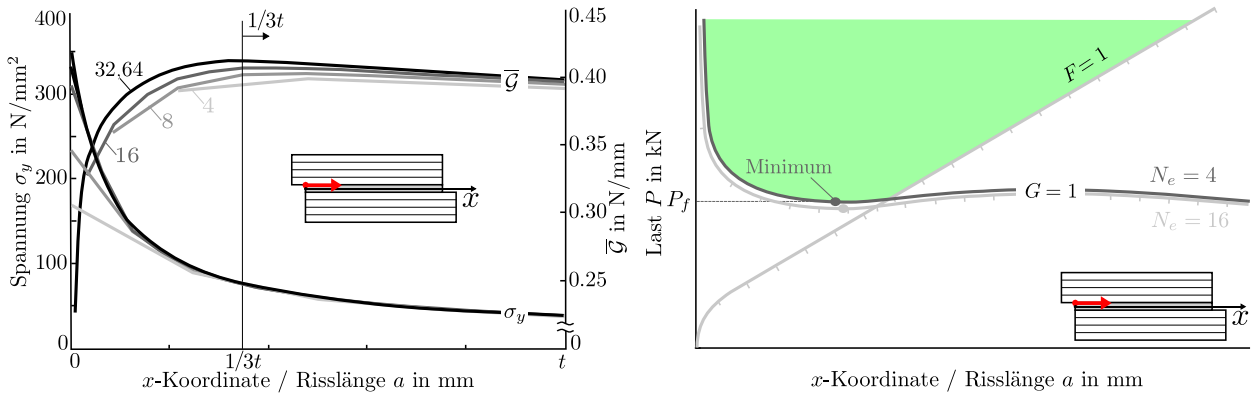
Tabelle 4.4: Konvergenz der Spannungen und der inkrementellen Energiefreisetzungsrate.

im Gegensatz zu allen anderen Risstypen innerhalb der Struktur und nicht vom Rand aus. Dies führt dazu, dass dieser Riss zwei Risspitzen besitzt. In Abbildung 4.4d ist interlaminare Rissinitiierung vom gegenüberliegenden Rand gezeigt wie sie auch in den Experimenten von Ribeiro et al. (2016) beobachtet wurde. Die beiden interlaminaren Risstypen können je nach Belastung und Struktursituation einzeln oder gemeinsam auftreten. Diese beiden Risstypen werden ebenfalls in Kapitel 7 näher betrachtet.

Überdies wurde bei den Voruntersuchungen für die Kohäsivzonenmodellierung festgestellt, dass Klebschichtversagen und interlaminares Versagen getrennt voneinander modelliert werden müssen. Werden in allen kritischen Bereichen gleichzeitig Kohäsivzonenelemente eingefügt, führt dies zu einer zu hohen Versagenslast im Vergleich zu einer getrennten Betrachtung. Der Grund liegt darin, dass durch die Entfestigung überlasteter Teilbereiche neue Lastpfade entstehen und so der Lastabfall bzw. das Versagen zu höheren Lasten verschoben wird. Dies bedeutet, dass zwei Simulationen nötig sind, um die Versagenslast für Klebschichtversagen und interlaminares Versagen mit Kohäsivzonen zu ermitteln. Außer interlaminarem Versagen kann mit dem vorgestellten Finite-Elemente-Modell ebenso intralaminare Versagen modelliert werden. Dazu müssen lediglich die Festigkeits- und Bruchzähigkeitswerte angepasst werden und die betreffende Schicht entlang des erwarteten intralaminaren Risspfads geteilt werden.

4.2 Voruntersuchungen zur finiten Bruchmechanik

Der zweite Modellierungsansatz zur Versagenslastbewertung der Überlappungsklebung ist das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium. Die zur Auswertung nötigen Spannungen und Energiefreisetzungsrate werden ebenfalls mittels einer Finite-Elemente-Modellierung bestimmt. Die Spannungen müssen für einen ungerissenen Zustand ermittelt werden, die freigesetzte Energie wird für den Übergang vom ungerissenen in den gerissenen Zustand ermittelt. Für diese Zwecke muss die Diskretisierung des Finite-Elemente-Modells untersucht werden. Das Finite-Elemente-Modell ist mit EVZ-Viereckselementen mit quadratischen Ansatzfunktionen (CPE8 in Abaqus 2016) aufgebaut. Jede Laminatschicht wird mit mindestens zwei bis drei Elementen über ihre Höhe diskretisiert. Zusätzlich muss im Bereich der Bi-Materialkerbe fein vernetzt werden, um den Einfluss der schwachen Spannungssingularität abbilden zu können. Da an Spannungssingularitäten keine Konvergenz bezüglich der Spannungen erreicht werden kann, wurde eine Konvergenzanalyse für die inkrementelle Energiefreisetzungsrate durchgeführt. Dafür wurde die Anzahl der Elemente N_e über der entsprechenden Einzelschicht variiert. Weiterhin werden in den Voruntersuchungen zur finiten Bruchmechanik die hoch belasteten Bereiche identifiziert.



(a) Verhalten der Spannungen σ_y und der inkrementellen Energiefreisetzungsrate \bar{G} für $N_e=4, 8, 16, 32, 64$ Elemente über der Klebschichtdicke

(b) Visualisierung des Optimierungsproblems, Gleichung (2.113). Die Versagenslast P_f ist die minimale Last bei der die beiden Restriktionen $F(\sigma_{ij})$ und $G(\bar{G})$ erfüllt sind.

Abbildung 4.5: Konfiguration: Neto et al. (2012) für $2c=10$ mm

In Abbildung 4.5a ist der Diskretisierungseinfluss beispielhaft für einen Riss zwischen Klebung und unterem Füge­teil für eine Konfiguration von Neto et al. (2012) mit $2c=10$ mm gezeigt. Zu sehen ist die Spannungslösung für einen ungerissenen Zustand und die inkrementelle Energiefreisetzungsrate für den Übergang zum gerissenen Zustand. Beides ist aufgetragen für $N_e=4, 8, 16, 32, 64$ Elemente über der Klebschichtdicke. In Hell et al. (2014) wurde gezeigt, dass für Klebschichtversagen mit einer Risslänge $a > 1/3t$ zu rechnen ist. Aus diesem Grund ist der Graph nochmals mit einer vertikalen Linie unterteilt, wobei in diesem Fall nur der Teilbereich rechts Einfluss auf die Auswertung des gekoppelten Spannungs- und Energie-Kriteriums hat. Für die Spannungslösung σ_y zeigt sich das typische Verhalten an einer Spannungssingularität mit wachsenden Spannungen für eine feinere Diskretisierung. Für den Bereich $x \geq 1/3t$ zeigen die Spannungslösungen für alle betrachteten Elementgrößen keine Abweichungen. Für die Auswertung des Spannungsteilkriteriums ist also mit keinem Diskretisierungseinfluss zu rechnen. Die inkrementelle Energiefreisetzungsrate zeigt auch bei Risslängen $a \geq 1/3t$ einen Diskretisierungseinfluss. In Abbildung 4.5b ist das zugehörige Optimierungsproblem aus Gleichung 2.113 aufgetragen. Es ist zu sehen, dass der Diskretisierungseinfluss auf die inkrementelle Energiefreisetzungsrate nur in abgeschwächter Form auf die Versagenslast wirkt. Zwischen den betrachteten Fällen mit $N_e = 4$ und $N_e = 16$ unterscheidet sich die Versagenslast um weniger als 1%, während die inkrementelle Energiefreisetzungsrate eine Abweichung von 4,3% aufweist. $N_e = 32, 64$ ist zum Lösen des Optimierungsproblems daher wegen der sich ergebenden hohen Rechenzeiten nicht zielführend und auch nicht notwendig. Zu erklären ist die abgeschwächte Auswirkung des Diskretisierungsfehlers für die inkrementelle Energiefreisetzungsrate auf die Versagenslast mit dem Zusammenhang $\bar{G} \sim P^2$.

Um die hoch belasteten Bereiche identifizieren zu können, wird im Folgenden eine Spannungsanalyse durchgeführt. Dazu werden die Spannungen entlang der Grenzfläche zwischen der Klebschicht und dem oberen Füge­teil und die Spannungen entlang der Grenzfläche zwischen der ersten und zweiten Einzelschicht über der Klebschicht ausgewertet. In Abbildung 4.6 sind jeweils die Normalspannungen σ_y und die Schubspannungen τ_{xy} entlang des Überlappungs­bereichs aufgetragen, in Abbildung 4.6a für die Grenzfläche zwischen Klebschicht und oberem Füge­teil und in Abbildung 4.6b für die interlaminaire Grenzfläche zwischen der ersten und zweiten Schicht über der Klebschicht. Die Ergebnisse zeigen für die beiden Fälle eindeutig

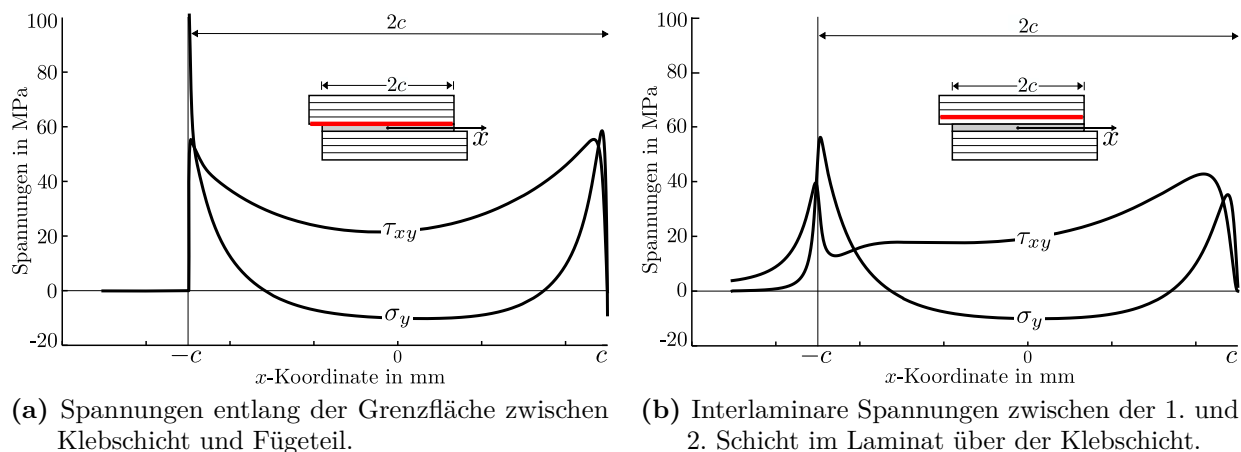


Abbildung 4.6: Konfiguration: Ribeiro et al. (2016) für $2c = 10$ mm und Klebstoff XNR6823.

eine Spannungssingularität der Bi-Materialkerbe bzw. die Spannungsüberhöhungen an den Enden des Überlappungsbereichs. In der Klebschicht sind somit bei $x=0$ Risse vom Rand, direkt ausgehend von der Bi-Materialkerbe zu vermuten. Dies ist in guter Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen und den Voruntersuchungen der Kohäsivzonenmodellierung. Ebenfalls in der Klebschicht liegen Spannungsüberhöhungen am gegenüberliegenden Überlappungsende vor. Direkt am Rand bei $x=c$ sinken die Spannungen wieder stark ab, die Normalspannungen können je nach untersuchter Konfiguration sogar in den Druckbereich übergehen. Somit liegt der hoch belastete Bereich an dieser Stelle innerhalb der Struktur. Da in den experimentellen Untersuchungen an dieser Stelle kein Versagen vorkommt, wird diese im Weiteren nicht mehr betrachtet. Die interlaminaren Spannungen aus Abbildung 4.6b zeigen an beiden Überlappungsenden ebenfalls zwei hoch belastete Bereiche mit Spannungskonzentrationen. Sowohl bei $x = -c$ als auch bei $x=c$ liegen die hoch belasteten Bereiche innerhalb der Struktur und erstrecken sich nicht bis zur Berandung. An beiden Stellen wurde in Experimenten Rissinitiierung dokumentiert, siehe Abbildungen 3.3 und 3.4. Rissinitiierung in diesen beiden Bereichen wird im Folgenden als Riss über dem Kerb (RÜK) für $x = -c$ bzw. Riss vom gegenüberliegenden Rand (RGR) für $x=c$ bezeichnet. Für den RÜK ergibt sich neben der Risslänge noch ein zusätzlicher Parameter, die Position des Rissmittelpunktes (RM). Wird dieser zusätzliche Parameter im gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium vollständig berücksichtigt, steigt der Rechenaufwand erheblich. Durch eine Analyse der inkrementellen Energiefreisetzungsrate für den RÜK kann der Modellierungsaufwand reduziert werden.

In Abbildung 4.7 ist die inkrementelle Energiefreisetzungsrate über die Position des Rissmittelpunktes aufgetragen, mit dem Scharparameter Risslänge. Die grünen Linien begrenzen die Region, in welcher der RM zugehörig zur jeweiligen Risslänge liegen darf. Diese Region wird über das Spannungskriterium festgelegt. Der grüne Bereich auf der Abszisse zeigt direkt den überlasteten Bereich für eine Risslänge $a \rightarrow 0$ an. Wird ein RM festgehalten, ist ein monotoner Anstieg der inkrementellen Energiefreisetzungsrate mit der Risslänge zu beobachten. Wird hingegen die Risslänge festgehalten und der Rissmittelpunkt variiert, zeigt sich ein nicht-monotoner Verlauf. Die Spitze der grünen Begrenzungslinie zeigt auf den Maximalwert der inkrementellen Energiefreisetzungsrate. Gleichzeitig ist dies der Punkt, welcher die maximal mögliche Risslänge anzeigt. Die maximal mögliche Risslänge überspannt den gesamten überlasteten Bereich, weshalb für diesen Fall keine Variation des Rissmittelpunktes möglich ist. Da

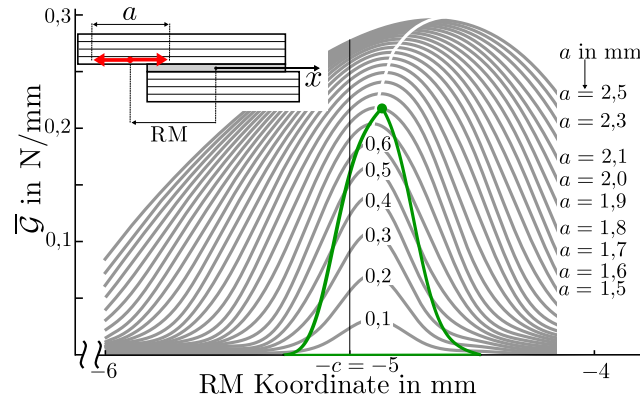


Abbildung 4.7: Einfluss der Rissmittelpunkt-Koordinate RM und der Risslänge a auf die inkrementelle Energiefreisetzungsrate für einen RÜK. Die grünen Linien begrenzen die Region in der der RM zugehörig zur jeweiligen Risslänge liegen darf. Die betrachtete Konfiguration ist aus Ribeiro et al. (2016) übernommen mit $2c = 10,0$ mm und einer äußeren Last $P = 10\,000$ N.

der maximal mögliche Riss gleichzeitig derjenige mit der maximalen Energiefreisetzungsrate ist, genügt es für die Versagenslastbestimmung, nur diese Risslänge zu modellieren. Damit entfällt der Rissmittelpunkt als Parameter. Ist der maximal mögliche Riss energetisch nicht zulässig, sind es auch alle anderen Risslängen nicht, unabhängig davon wo ihre jeweiligen RM im überlasteten Bereich liegen.

4.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde in einem ersten Schritt ein Finite-Elemente-Modell aus der realen Struktursituation abgeleitet. In den nachfolgenden Kapiteln wird die Finite-Elemente-Modellierung für verschiedene Zwecke angewendet. Zum einen werden die Versagenslasten für die einschnittige Überlappungsklebung mit einem Kohäsivzonenmodell als Referenzlösung berechnet. Die hierfür nötigen Voruntersuchungen wurden in diesem Kapitel vorgestellt. Außerdem wird eine Versagenslastvorhersage mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium ausgewertet. Die hierfür nötigen Voruntersuchungen wurden ebenfalls in diesem Kapitel vorgestellt. In Kapitel 6 wird das Rissöffnungsintegral mit Hilfe des in diesem Kapitel vorgestellten Finite-Elemente-Modells für den Fall der nichtlinearen Elastizität untersucht. Im nachfolgenden Kapitel 5 wird ein analytisches Balkenmodell der einschnittigen Überlappungsklebung vorgestellt. Das Finite-Elemente-Modell dient in diesem Kapitel zur Ermittlung der Referenzlösungen für die betrachteten Feldgrößen.

Kapitel 5

Analytisches Balkenmodell interlaminarer Rissbildung

In diesem Kapitel wird ein analytisches Balkenmodell der einschnittigen Überlappungsklebung hergeleitet. Mit diesem lassen sich Spannungen im ungerissenen Zustand und inkrementelle Energiefreisetzungsraten für interlaminare Rissinitiierung vom gegenüberliegenden Rand ermitteln. Somit ist eine Versagensbewertung mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium möglich. Außerdem sind mit dem hier vorgestellten Balkenmodell alle Schnittgrößen an den Überlappungsenden zugänglich.

5.1 Balkenmodell mit und ohne Riss

In diesem Abschnitt sollen zuerst die Modellierungsannahmen für das Balkenmodell der einschnittigen Überlappungsklebung mit und ohne Riss dargelegt werden. Als Modellierungsstrategie wird hier der in Kapitel 3.1 vorgestellte Ansatz mit äquivalenten Einzelschichten gewählt. Im ungerissenen Zustand wird die einschnittige Überlappungsklebung als Dreifeldbalken mit unstetiger Mittellinie modelliert, siehe Abbildung 5.1. Die Struktur wird hierzu in drei Bereiche $i=\{1, 0, 2\}$ mit jeweils eigenem x_i, z_i -Koordinatensystem unterteilt. Der Index 1 steht für den überlappungsfreien linken Teilbereich, 0 steht für den Überlappungsbereich und 2 für den überlappungsfreien rechten Teilbereich. Die Koordinatensysteme liegen jeweils in der Mittelebene des zugehörigen Teilbereichs. Die unstete Mittellinie ergibt sich hierbei wegen der unterschiedlichen Positionen der einzelnen Teilbereiche. Verschiebungen in Richtung x_i werden mit u_i und Verschiebungen in Richtung z_i werden mit w_i bezeichnet. Die überlappungsfreien Fügeiteillängen werden mit l_1 bzw. l_2 bezeichnet und die Überlappungslänge mit $2c$. Die Klebschichtdicke wird mit t beschrieben und die Fügeiteildicken mit h_1 bzw. h_2 . Um einen interlaminaren Riss vom gegenüberliegenden Rand zu modellieren, wird die Modellierungsstrategie von Weißgraeber (2014) auf den interlaminaren Riss übertragen. Weißgraeber (2014) modelliert einen Riss in der Klebschicht, indem der entlastete Bereich unter dem Riss aus

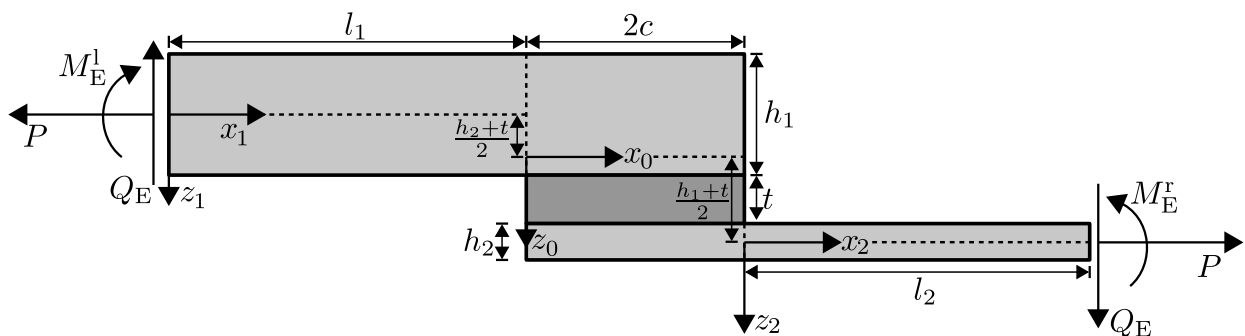


Abbildung 5.1: Gezeigt ist die einschnittige Überlappungsklebung in ungerissener Konfiguration mit allen geometrischen Abmessungen und den zugehörigen Koordinatensystemen.

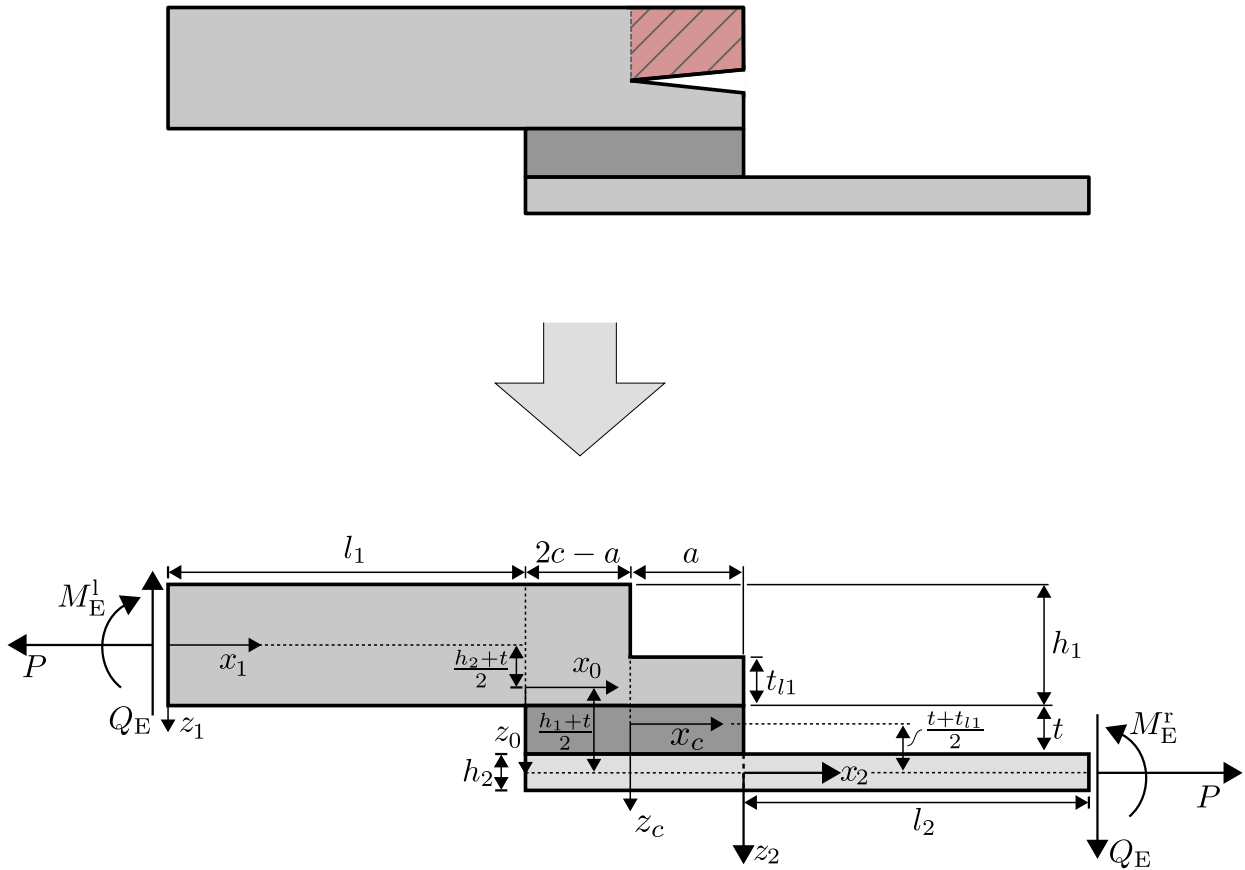


Abbildung 5.2: Übergang in den gerissenen Zustand.

der Modellierung herausgenommen wird, indem die Überlappungslänge verkürzt wird. Die Begründung hierfür ist, dass durch diesen Bereich kein Lastfluss mehr stattfindet. In der vorliegenden Arbeit wird der gerissene Zustand mit interlaminarem Riss vom gegenüberliegenden Rand ebenfalls durch Weglassen eines Teilbereichs, durch den kein Lastfluss stattfinden kann, abgebildet. Dieser Übergang zum gerissenen Zustand ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Durch dieses Vorgehen muss die gerissene einschnittige Überlappungsklebung als Vierfeldbalken mit unstetigen Mittellinien modelliert werden. Der Überlappungsbereich wird durch dieses Vorgehen in zwei Teilbereiche unterteilt: einen Bereich ohne Riss der Länge $2c-a$ und einen gerissenen Bereich der Länge a . Für den gerissenen Bereich wird vom oberen Füge teil nur eine Einzelschicht der Höhe t_{l1} modelliert, hierfür muss ein zusätzliches Koordinatensystem x_c, z_c eingeführt werden.

In allen Teilbereichen der gerissenen bzw. ungerissenen Struktur wird die geometrisch nichtlineare Balkentheorie aus Abschnitt 2.2 angewendet. Als Randlasten sind beliebige Querkräfte Q_E und Biegemomente M_E^l, M_E^r eingeführt, die je nach Art der Randbedingungen unterschiedliche Werte annehmen können. In der folgenden Betrachtung wird nur noch das Biegemoment M_E^r verwendet, da M_E^l und M_E^r über das Momentengleichgewicht voneinander abhängig sind. Um die geometrisch nichtlineare Deformation zu berücksichtigen, werden die Schnittmomente in allen Teilbereichen durch Gleichgewicht an der deformierten Struktur bestimmt. In Abbildung 5.3 sind zwei Freikörperschnitte an der deformierten Struktur für eine Stelle x_0 im Überlappungsbereich und eine Stelle x_2 im unteren Füge teil gezeigt. Die Freischnitte für das obere Füge teil und den gerissenen Bereich folgen identisch.

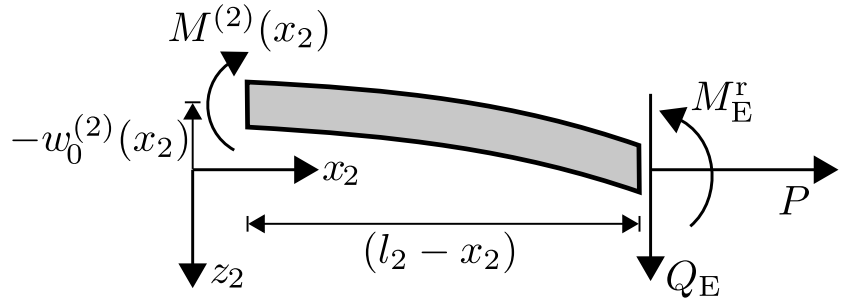


Abbildung 5.3: Momentengleichgewicht an der deformierten Struktur vom negativen Schnittufer aus im unteren Fügeteil.

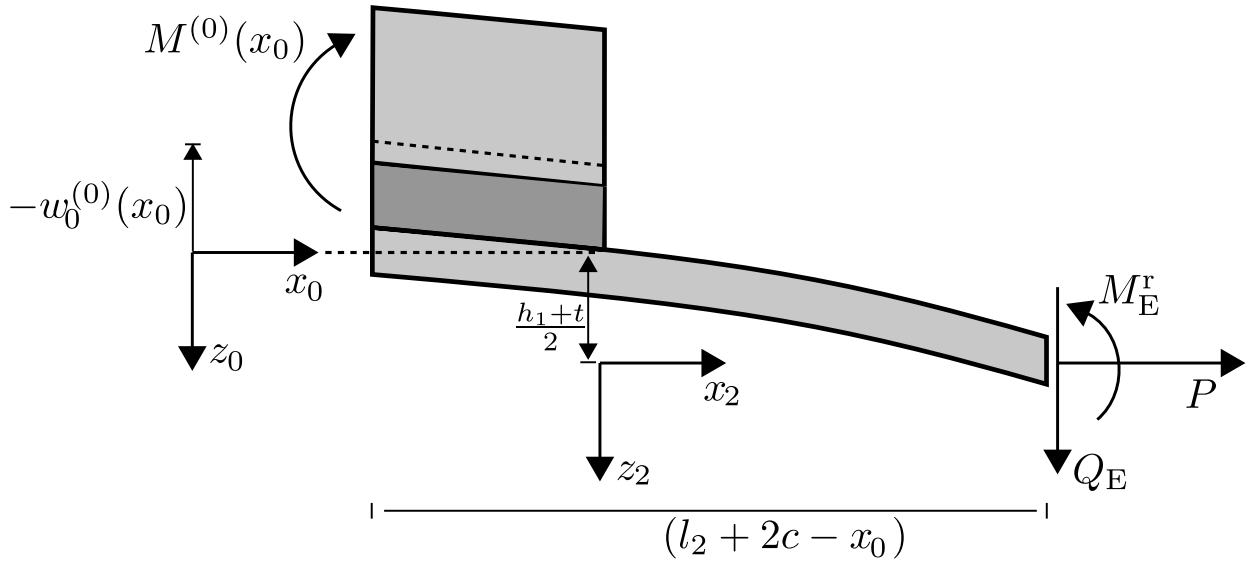


Abbildung 5.4: Momentengleichgewicht an der deformierten Struktur vom negativen Schnittufer aus im Überlappungsbereich.

5.1.1 Momentengleichgewicht

Die Schnittmomente für die einzelnen Teilbereiche folgen somit durch Anwenden des Momentengleichgewichts. Für den überlappungsfreien Teil des unteren Fügeteils und den ungerissenen Überlappungsbereich sind die Schnittbilder für den ausgelenkten Zustand in Abbildungen 5.3 und 5.4 dargestellt. Die Biegemomentenverläufe ergeben sich folglich zu:

$$\begin{aligned}
 M^{(1)}(x_1) &= M_E^r + Q_E x_1 - Q_E (l_1 + 2c + l_2) \\
 &\quad + P \left(\frac{h_1}{2} + t + \frac{h_2}{2} \right) - P w_0^{(1)}(x_1) \\
 M^{(0)}(x_0) &= M_E^r + Q_E x_0 - Q_E (2c + l_2) \\
 &\quad + P \left(\frac{h_1 + t}{2} \right) - P w_0^{(0)}(x_0) \\
 M^{(c)}(x_c) &= M_E^r + Q_E x_c - Q_E (a + l_2) \\
 &\quad + P \left(\frac{t_{11} + t}{2} \right) - P w_0^{(c)}(x_c) \\
 M^{(2)}(x_2) &= M_E^r + Q_E x_2 - Q_E l_2 - P w_0^{(2)}(x_2)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Der Index $(\cdot)^{(i)}$ bezeichnet die einzelnen Bereiche der ungerissenen bzw. gerissenen Überlappungsklebung. Die Terme $+P(\dots)$ in den Gleichungen (5.1) repräsentieren den Einfluss der unstetigen Mittelebene. Aus dem Kräftegleichgewicht, Gleichung (2.62), und den Randbedingungen für (M_E^r, Q_E, P) folgen die übrigen Schnittkräfte in den jeweiligen Abschnitten zu:

$$N^{(i)}(x_i) = P \quad i = 0, 1, 2, c \quad (5.2)$$

$$Q^{(i)}(x_i) = Q_E + P\psi_x^{(i)}(x_i) \quad i = 0, 1, 2, c \quad (5.3)$$

Werden nun die Schnittkräfte in die konstitutiven Beziehungen, Gleichung (2.63), eingesetzt folgen die Beziehungen für die Ableitung der axialen Verschiebung $u_0^{(i)}$ und die Verdrehung $\psi_x^{(i)}$ zu:

$$u_0^{(i)'} = \frac{P}{A_{11}^{(i)}} - \frac{B_{11}^{(i)}}{A_{11}^{(i)}} \frac{K_S^{(i)} A_{55}^{(i)}}{K_S^{(i)} A_{55}^{(i)} - P} w_0^{(i)''} - \frac{1}{2} \left(w_0^{(i)'} \right)^2 \quad i = 0, 1, 2, c \quad (5.4)$$

$$\psi_x^{(i)} = \frac{Q_E}{K_S^{(i)} A_{55}^{(i)} - P} - \frac{K_S^{(i)} A_{55}^{(i)}}{K_S^{(i)} A_{55}^{(i)} - P} w_0^{(i)'} \quad i = 0, 1, 2, c$$

Mit diesen Gleichungen, dem Materialgesetz in Gleichung (2.63) und den Schnittmomenten in Gleichung (5.1) können nun vier gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die transversalen Verschiebungen $w_0^{(1)}$, $w_0^{(0)}$, $w_0^{(c)}$ und $w_0^{(2)}$ hergeleitet werden. Mit den Konstanten

$$\lambda^{(i)} = \left(\frac{\left(D_{11}^{(i)} - \frac{(B_{11}^{(i)})^2}{A_{11}^{(i)}} \right) K_S^{(i)} A_{55}^{(i)}}{(K_S^{(i)} A_{55}^{(i)} - P) P} \right)^{\frac{1}{2}} \quad i = 0, 1, 2, c \quad (5.5)$$

lassen sich die Differentialgleichungen schreiben als

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} - \frac{M_E^r}{P} + \frac{Q_E}{P} (l_1 + 2c + l_2 - x_1) + w_0^{(1)}(x_1) \\ &\quad - \left(\lambda^{(1)} \right)^2 w_0^{(1)''}(x_1) - \left(\frac{h_1}{2} + t + \frac{h_2}{2} \right) \\ 0 &= \frac{B_{11}^{(0)}}{A_{11}^{(0)}} - \frac{M_E^r}{P} + \frac{Q_E}{P} (2c + l_2 - x_0) + w_0^{(0)}(x_0) \\ &\quad - \left(\lambda^{(0)} \right)^2 w_0^{(0)''}(x_0) - \left(\frac{h_1}{2} + \frac{t}{2} \right) \\ 0 &= \frac{B_{11}^{(c)}}{A_{11}^{(c)}} - \frac{M_E^r}{P} + \frac{Q_E}{P} (l_2 + a - x_c) + w_0^{(c)}(x_c) \\ &\quad - \left(\lambda^{(c)} \right)^2 w_0^{(c)''}(x_c) - \left(\frac{t}{2} + \frac{t_{11}}{2} \right) \\ 0 &= \frac{B_{11}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} - \frac{M_E^r}{P} + \frac{Q_E}{P} (l_2 - x_2) + w_0^{(2)}(x_2) \\ &\quad - \left(\lambda^{(2)} \right)^2 w_0^{(2)''}(x_2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

In diesen Gleichungen wird eine Beziehung zwischen den transversalen Verschiebungen $w_0^{(i)}$ der einzelnen Bereiche mit der äußeren Last P , den Lagerbedingungen Q_E , M_E^r und den geometrischen und materialspezifischen Größen h_1 , t , h_2 , l_1 , $2c$, a , l_2 , $A_{11}^{(i)}$, $D_{11}^{(i)}$, $B_{11}^{(i)}$ und $\lambda^{(i)}$ hergestellt.

5.1.2 Geschlossen-analytische Lösung

Die im vorherigen Abschnitt für die einzelnen Teilbereiche hergeleiteten gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten besitzen die folgende geschlossen-analytische Lösung:

$$\begin{aligned}
 w_0^{(1)}(x_1) &= -\frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} + \left(\frac{h_1}{2} + t + \frac{h_2}{2}\right) + \frac{M_E^r}{P} - \frac{Q_E}{P} (l_1 + 2c + l_2 - x_1) \\
 &\quad + C_{11} \exp\left(\frac{x_1}{\lambda^{(1)}}\right) + C_{12} \exp\left(-\frac{x_1}{\lambda^{(1)}}\right) \\
 w_0^{(0)}(x_0) &= -\frac{B_{11}^{(0)}}{A_{11}^{(0)}} + \left(\frac{h_1}{2} + \frac{t}{2}\right) + \frac{M_E^r}{P} - \frac{Q_E}{P} (2c + l_2 - x_0) \\
 &\quad + C_{01} \exp\left(\frac{x_0}{\lambda^{(0)}}\right) + C_{02} \exp\left(-\frac{x_0}{\lambda^{(0)}}\right) \\
 w_0^{(c)}(x_c) &= -\frac{B_{11}^{(c)}}{A_{11}^{(c)}} + \left(\frac{t}{2} + \frac{t_{11}}{2}\right) + \frac{M_E^r}{P} - \frac{Q_E}{P} (l_2 + a - x_c) \\
 &\quad + C_{c1} \exp\left(\frac{x_c}{\lambda^{(c)}}\right) + C_{c2} \exp\left(-\frac{x_c}{\lambda^{(c)}}\right) \\
 w_0^{(2)}(x_2) &= -\frac{B_{11}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} + \frac{M_E^r}{P} - \frac{Q_E}{P} (l_2 - x_2) \\
 &\quad + C_{21} \exp\left(\frac{x_2}{\lambda^{(2)}}\right) + C_{22} \exp\left(-\frac{x_2}{\lambda^{(2)}}\right)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Die Lösung für die einzelnen Teilbereiche ist somit bis auf die noch zu bestimmenden Konstanten bekannt. Die freien Konstanten C_{11} , C_{12} , C_{01} , C_{02} , C_{c1} , C_{c2} , C_{21} und C_{22} müssen noch über die Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt werden. Über die freien Konstanten sind die Verschiebungsfelder der einzelnen Teilbereiche miteinander gekoppelt. In Abbildung 5.5 sind die Rand- und Übergangsbedingungen für den ungerissenen und den gerissenen Zustand für unterschiedliche Lagerbedingungen (gelenkige Lagerung, feste Einspannung, Versteifungspflaster und Reparaturpflaster) angegeben.

Für die gelenkige Lagerung treten keine Einspannmomente $M_E^{(r)}$ und $M_E^{(l)}$ auf und die Lagerkraft $Q_E = \alpha P$ kann aufgrund der statisch bestimmten Lagerung über das Kräfte- und Momentengleichgewicht berechnet werden. Die geometrische Konstante α ist dabei

$$\alpha = \frac{h_1 + 2t + h_2}{2l_1 + 4c + 2l_2}. \tag{5.8}$$

Für die statisch unbestimmte, feste Einspannung müssen die statisch überzähligen Lagerkräfte und -momente über zusätzliche Randbedingungen berechnet werden. Das Versteifungspflaster kann als einschnittige Überlappungsklebung mit Symmetrierandbedingung an einem Ende modelliert werden, wohingegen das Reparaturpflaster über eine Symmetrierandbedingung im Bereich der Überlappung modelliert werden kann. In den beiden letztgenannten Fällen tritt

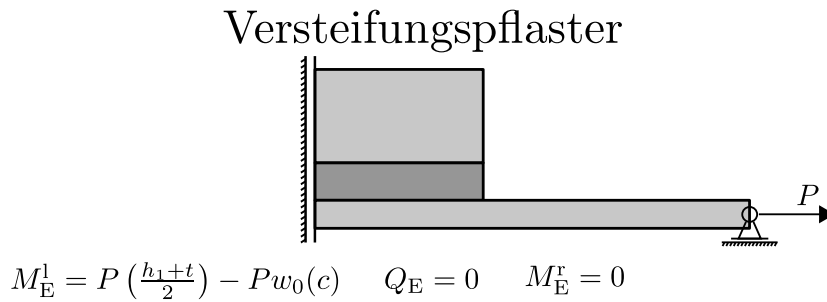
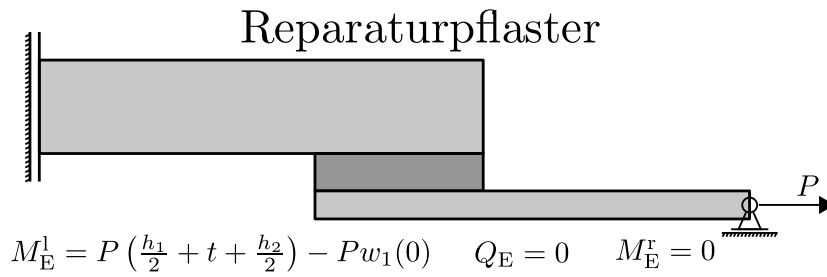
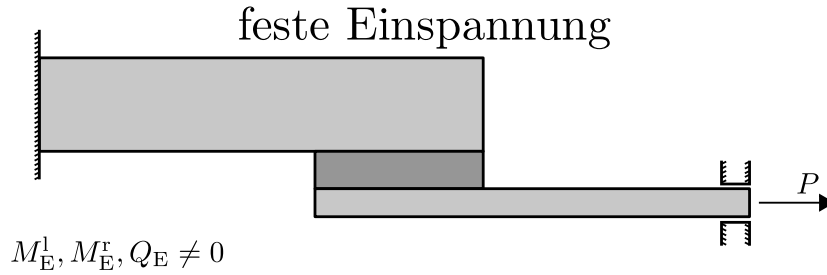
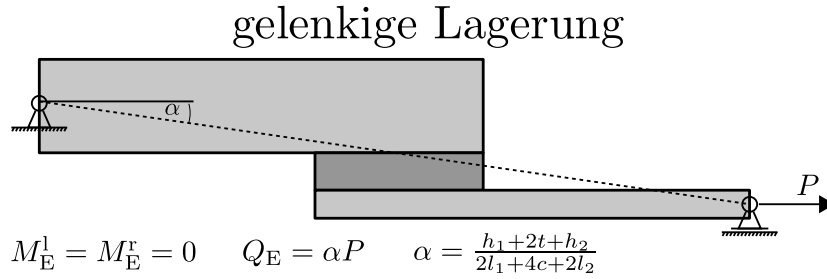


Abbildung 5.5: Beispiele für unterschiedliche Lagerbedingungen die mit dem vorliegenden Modell abgebildet werden können.

wegen der Symmetrie keine Lagerkraft Q_E auf. Für die beiden einschnittigen Überlappungsklebung werden zusätzlich noch die Übergangsbedingungen für den gerissenen Zustand angegeben. Die benötigten Rand- und Übergangsbedingungen lauten:

Gelenkige Lagerung, ungerissen

$$w_0^{(1)}(0) = 0$$

$$w_0^{(1)}(l_1) = w_0^{(0)}(0)$$

$$w_0^{(0)}(2c) = w_0^{(2)}(0)$$

$$w_0^{(2)}(l_2) = 0$$

$$\psi_x^{(1)}(l_1) = \psi_x^{(0)}(0)$$

$$\psi_x^{(0)}(2c) = \psi_x^{(2)}(0)$$

Gelenkige Lagerung, gerissen

$$w_0^{(1)}(0) = 0$$

$$w_0^{(1)}(l_1) = w_0^{(0)}(0)$$

$$w_0^{(0)}(2c - a) = w_0^{(c)}(0)$$

$$w_0^{(c)}(a) = w_0^{(2)}(0)$$

$$w_0^{(2)}(l_2) = 0$$

$$\psi_x^{(1)}(l_1) = \psi_x^{(0)}(0)$$

$$\psi_x^{(0)}(2c - a) = \psi_x^{(c)}(0)$$

$$\psi_x^{(c)}(a) = \psi_x^{(2)}(0)$$

Feste Einspannung, ungerissen

$$w_0^{(1)}(0) = 0$$

$$w_0^{(1)}(l_1) = w_0^{(0)}(0)$$

$$w_0^{(0)}(2c) = w_0^{(2)}(0)$$

$$w_0^{(2)}(l_2) = 0$$

$$\psi_x^{(1)}(0) = 0$$

$$\psi_x^{(1)}(l_1) = \psi_x^{(0)}(0)$$

$$\psi_x^{(0)}(2c) = \psi_x^{(2)}(0)$$

$$\psi_x^{(2)}(l_2) = 0$$

Feste Einspannung, gerissen

$$w_0^{(1)}(0) = 0$$

$$w_0^{(1)}(l_1) = w_0^{(0)}(0)$$

$$w_0^{(0)}(2c - a) = w_0^{(c)}(0)$$

$$w_0^{(c)}(a) = w_0^{(2)}(0)$$

$$w_0^{(2)}(l_2) = 0$$

$$\psi_x^{(1)}(0) = 0$$

$$\psi_x^{(1)}(l_1) = \psi_x^{(0)}(0)$$

$$\psi_x^{(0)}(2c - a) = \psi_x^{(c)}(0)$$

$$\psi_x^{(c)}(a) = \psi_x^{(2)}(0)$$

$$\psi_x^{(2)}(l_2) = 0$$

Reparaturpflaster

$$w_0^{(1)}(l_1) = w_0^{(0)}(0)$$

$$w_0^{(0)}(2c) = w_0^{(2)}(0)$$

$$w_0^{(2)}(l_2) = 0$$

$$\psi_x^{(1)}(0) = 0$$

$$\psi_x^{(1)}(l_1) = \psi_x^{(0)}(0)$$

$$\psi_x^{(0)}(2c) = \psi_x^{(2)}(0)$$

Versteifungspflaster

$$w_0^{(0)}(2c) = w_0^{(2)}(0)$$

$$w_0^{(2)}(l_2) = 0$$

$$\psi_x^{(0)}(c) = 0$$

$$\psi_x^{(0)}(2c) = \psi_x^{(2)}(0)$$

Die Rand- und Übergangsbedingungen stellen einen Satz an linear unabhängigen Gleichungen dar, mit welchen die unbekannten Konstanten aus Gleichung (5.7) berechnet werden können.

$$A_{ij}c_j = b_i \quad (5.9)$$

Hierbei ergeben sich die Komponenten A_{ij} und b_i durch Einsetzen der Ansätze der allgemeinen Lösungen für $w^{(i)}$ und $\psi_x^{(i)}$ in die Rand- und Übergangsbedingungen. Die Anzahl der Unbekannten variiert je nach Problemstellung mit $c_j = [C_{11}, C_{12}, C_{01}, C_{02}, C_{21}, C_{22}]^T$ für die ungerissene Konfiguration mit statisch bestimmter Lagerung und $c_j = [C_{11}, C_{12}, C_{01}, C_{02}, C_{c1}, C_{c2}, C_{21}, C_{22}]^T$ für die gerissene Konfiguration mit statisch bestimmter Lagerung bzw. $c_j = [C_{11}, C_{12}, C_{01}, C_{02}, C_{21}, C_{22}, Q_E, M_E^{(r)}]^T$ für die ungerissene Konfiguration mit statisch unbestimmter Lagerung und $c_j = [C_{11}, C_{12}, C_{01}, C_{02}, C_{c1}, C_{c2}, C_{21}, C_{22}, Q_E, M_E^{(r)}]^T$ für die gerissene Konfiguration mit statisch unbestimmter Lagerung. Das Gleichungssystem kann mit einem mathematischen Gleichungslöser in geschlossener Form gelöst werden. Für die ungerissene Konfiguration mit gelenkiger Lagerung bzw. fester Einspannung sind die Konstanten im Anhang B aufgelistet. In dieser Arbeit wurde dazu das Softwarepaket Mathematica Version 11.3 verwendet.

5.2 Transversale Spannungen und inkrementelle Energiefreisetzungsraten

In der Balkentheorie aus Unterabschnitt 2.2 wird eine Timoshenko-Kinematik verwendet. Hierdurch wird eine Bestimmung der transversalen Schubverzerrungen aus Gleichung (2.54) möglich. Dies ermöglicht ebenfalls eine direkte Bestimmung der transversalen Schubspannungen aus dem Materialgesetz. Nachteilig bei der Bestimmung der Schubspannungen direkt aus dem Materialgesetz ist, dass die Schubspannungen über den Balkenquerschnitt abschnittsweise konstant verlaufen. Dies verletzt zum einen die Bedingung der Schubfreiheit der Deckflächen und zum anderen werden die Schubspannungen hierdurch überschätzt. Deshalb wird ein Schubkorrekturfaktor benötigt, damit die Formänderungsenergie infolge der Querkraft mit der Formänderungsenergie infolge der Schubspannungen übereinstimmt. Eine qualitativ bessere Darstellung der transversalen Spannungen kann durch die Integration der Gleichgewichtsbedingungen, Gleichung (2.9), erfolgen (Becker u. Gross (2002), Reddy (2003)). Unter Vernachlässigung von Volumenkräften ergibt sich damit für den Balken folgender Zusammenhang:

$$\tau_{xz} = - \int \sigma_{x,x} dz \quad (5.10)$$

$$\sigma_z = - \int \tau_{xz,x} dz \quad (5.11)$$

Da sich die Spannung σ_x linear mit z verhält ergibt sich hierdurch ein quadratischer Verlauf für die transversalen Schubspannungen und ein kubischer Verlauf für die transversalen Normalspannungen. Die interlaminaren Spannungen für einen Laminatbalken können so durch bereichsweise Integration berechnet werden.

Die inkrementelle Energiefreisetzungsrates lässt sich nach Gleichung (2.107) aus der Änderung des Gesamtpotentials beim Übergang von einem ungerissenen Zustand (1) in einen gerissenen Zustand (2) berechnen, indem diese auf die neu entstandene Rissfläche bezogen wird. Für eine rein verschiebungsgesteuerte Belastung entspricht die Änderung des Gesamtpotentials $\Delta\Pi$

der Änderung der gespeicherten Formänderungsenergie $\Delta\Pi^i$. Unter reiner Laststeuerung kann mit dem Satz von CLAPEYRON, $\Pi^a = -2\Pi^i$, das äußere Potential Π^a durch die Formänderungsenergie Π^i ausgedrückt werden. So ergibt sich die inkrementelle Energiefreisetzungsrate zu:

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{\Pi_1^i - \Pi_2^i}{a} \quad , \quad \text{verschiebungsgesteuert} \quad (5.12)$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{\Pi_2^i - \Pi_1^i}{a} \quad , \quad \text{lastgesteuert} \quad (5.13)$$

Die Formänderungsenergie Π^i für den Laminatbalken lässt sich entsprechend Gleichung (2.65) über die Schnittkräfte berechnen.

5.3 Ergebnisse der analytischen Balkenmodellierung

Im nachfolgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der geometrisch nichtlinearen Balkenmodellierung vorgestellt. Hierzu werden zuerst die Spannungsfelder und die energetischen Größen untersucht, auf deren Basis eine Versagenslastbewertung mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium durchgeführt wird. Des Weiteren werden die Schnittgrößen an den Überlappungsenden ausgewertet. Die Schnittgrößen sind in vielen Fällen für die Auswertung eines Sandwich-Modells der Überlappungsklebung von Bedeutung, siehe beispielsweise Stein et al. (2015). Alle Ergebnisse aus der analytischen Modellierung werden mit den Ergebnissen einer Finite-Elemente-Modellierung, siehe Kapitel 4, verglichen. Die berechneten Versagenslasten werden mit den experimentellen Ergebnissen von Ribeiro et al. (2016) verglichen.

5.3.1 Axiale und transversale Spannungen

Im Folgenden werden die axialen und transversalen Spannungen im Überlappungsbereich verglichen. Für das analytische Modell ist zu erwarten, dass die Spannungslösungen im Bereich der Bi-Materialkerbe von denen des Finite-Elemente-Modells abweichen. Die dort auftretenden Spannungssingularitäten können mit einem Balkenmodell nicht abgebildet werden. Zuerst soll die Normalspannung σ_x im Überlappungsbereich untersucht werden. Diese kann direkt aus Gleichungen (2.54) und (2.32) des Balkenmodells abgeleitet werden.

In Abbildung 5.6 ist die axiale Normalspannung σ_x im Überlappungsbereich für eine feste z -Koordinate in der Mitte der ersten Schicht oberhalb der Klebschicht aufgetragen. Zu sehen ist, dass die Spannungen entfernt von den Überlappungsenden wie erwartet sehr gut mit den Spannungen aus dem Finite-Elemente-Modell übereinstimmen. Direkt oberhalb der Bi-Materialkerben können die Spannungssingularitäten mit dem Balkenmodell nicht abgebildet werden. Außer in den Randbereichen sind die Übereinstimmungen in den Verläufen von σ_x über der z -Koordinate ebenfalls gut. Direkt an den Stellen $x=0$ mm und $x=80$ mm weichen die Spannungen stark voneinander ab. In Abschnitt 5.3.3 wird gezeigt, dass die Biegemomente aus dem Balkenmodell $M_y = \int \sigma_x z dz$ an den Überlappungsenden, ausgehend von den Bereichen (1) und (2), trotzdem sehr gut mit den Biegemomenten, abgeleitet aus den axialen Spannungen der Finite-Elemente-Modellierung, übereinstimmen.

Die transversale Schubspannung τ_{xz} kann aus der Normalspannung σ_x mit Hilfe der Beziehung (5.10) berechnet werden. In Abbildung 5.7 ist die transversale Schubspannung τ_{xz} im

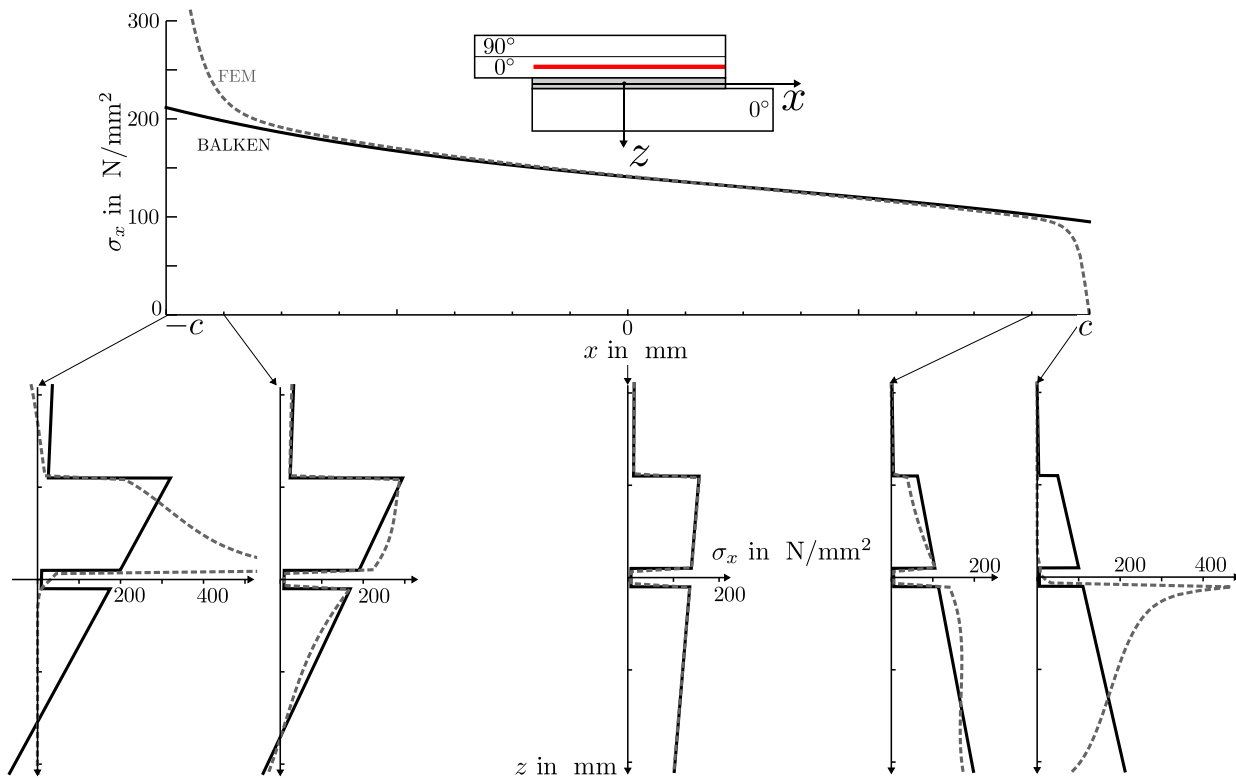


Abbildung 5.6: Spannung σ_x über der x -Koordinate aufgetragen.

Überlappungsbereich für eine feste z -Koordinate in der Mitte der ersten Schicht über der Klebschicht aufgetragen. Ebenfalls sind Verläufe von τ_{xz} über der z -Koordinate abgebildet. Wieder ist die Übereinstimmung mit den Spannungen aus dem Finite-Elemente-Modell in der Mitte des Überlappungsbereichs sehr gut. Zum Rand hin nimmt die Genauigkeit wieder ab und direkt an den Rändern $x=0$ mm und $x=80$ mm sind die Schubspannungen nicht aussagekräftig. Im Unterschied zu den Normalspannungen ist der Bereich, in dem die Schubspannungen von den Finite-Elemente-Ergebnissen abweichen, etwas größer.

Die transversale Normalspannung σ_z zeigt über den gesamten Überlappungsbereich eine große Abweichung zu den Spannungen des Referenzmodells. Dies gilt für die transversale Normalspannung auch für die Mitte des Überlappungsbereichs. Auch dort ergeben sich signifikante Abweichungen, wie in Abbildung 5.8 zu sehen ist. Im Randbereich nahe der Bi-Materialkerben ist die Abweichung noch größer als für die Spannungen σ_x und τ_{xz} . Außerdem ist der Bereich starker Spannungsüberhöhungen ausgedehnter als für die restlichen Spannungskomponenten.

Da die Spannungsüberhöhungen an den Überlappungsenden nicht abgebildet werden können, ist die äußere Last, die nötig ist um ein Spannungskriterium zu erfüllen, unrealistisch hoch. Das analytische Balkenmodell ist demzufolge nicht zur Auswertung eines Spannungskriteriums im Rahmen des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums geeignet. Weiterhin besteht die Möglichkeit die Versagenslast semi-analytisch zu ermitteln. Dazu wird die Spannungslösung für den ungerissenen Zustand einmal mit Hilfe einer Finite-Elemente-Analyse ermittelt. Die inkrementellen Energiefreisetzungsraten können in diesem Fall mit dem Balkenmodell bestimmt werden wodurch die Finite-Elemente-Analysen für die einzelnen Risslängen eingespart werden können. Hierdurch kann es immer noch zu Rechenzeiteinsparungen kommen, da der ungerissene Zustand nur einmal, der gerissene Zustand aber für alle in Betracht

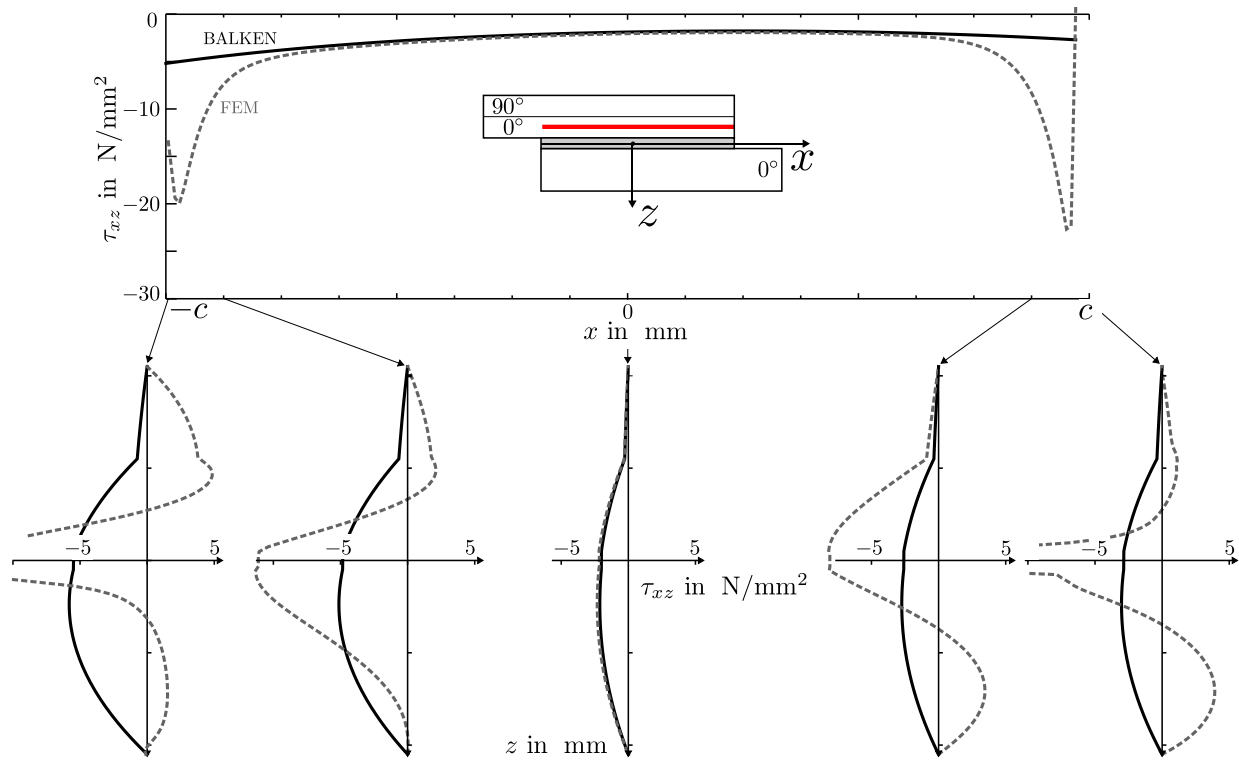


Abbildung 5.7: Spannung τ_{xz} über der x -Koordinate aufgetragen.

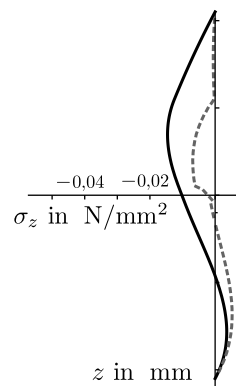


Abbildung 5.8: Transversale Normalspannung σ_z über der z -Koordinate für $x=0$ aufgetragen.

kommenden Risslängen berechnet werden muss. Im Folgenden wird deshalb zunächst die Vorhersagequalität für die inkrementellen Energiefreisetzungsraten näher untersucht.

5.3.2 Inkrementelle Energiefreisetzungsraten für interlaminare Risse

Im Folgenden wird die Frage diskutiert ob die mit Hilfe des analytischen Balkenmodells ermittelten Energiefreisetzungsraten im gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium eingesetzt werden können. Die inkrementelle Energiefreisetzungsrate kann mit dem analytischen Modell mit den Gleichungen (5.13) unter Verwendung von Gleichung (2.65) berechnet werden. Zu erwarten ist, dass die inkrementelle Energiefreisetzungsrate für sehr kurze Risslängen nicht zu dem zu erwartendem Wert $\bar{\mathcal{G}}(\Delta a=0)=0$ konvergiert sondern einen finiten Wert annimmt. Dieses Verhalten ist aus anderen Balkenmodellen, beispielsweise von Weißgraeber (2014),

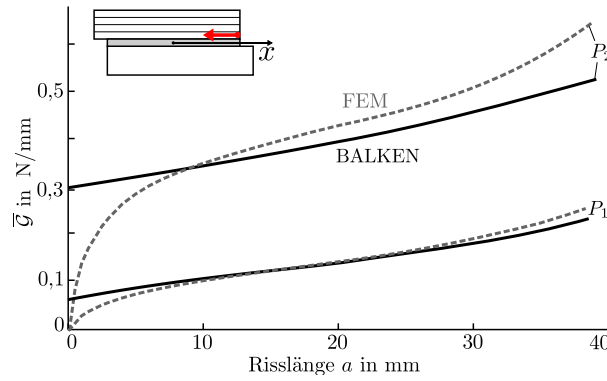


Abbildung 5.9: Vergleich der inkrementellen Energiefreisetzungsrate zwischen dem analytischen Modell und dem Finite-Elemente-Modell. Die gezeigte Konfiguration stammt aus Ribeiro et al. (2016) mit $2c=40$ mm.

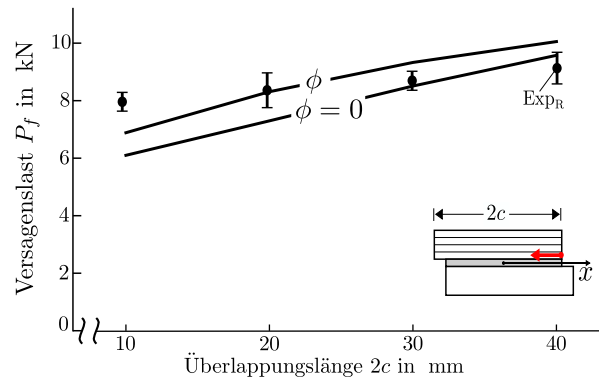


Abbildung 5.10: Vergleich der Versagenslasten für interlaminares Versagen für die semi-analytische Modellierung mit den experimentellen Ergebnissen von Ribeiro et al. (2016).

bekannt und stellt für die Versagenslastbewertung mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium kein Hindernis dar.

In Abbildung 5.9 ist die inkrementelle Energiefreisetzungsrate über der Risslänge für zwei äußere Lasten P_1 und P_2 aufgetragen. P_2 entspricht einer Last nahe der experimentellen Versagenslast dieser Konfiguration und P_1 der Hälfte der Versagenslast. Wie zu erwarten starten die inkrementellen Energiefreisetzungsrate für infinitesimal kurze Risslängen mit einem finiten Wert. Zu sehen ist eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Modellierung für große Risslängen und für kleine Lasten. Für sehr lange Risse, die die gesamte Überlappungslänge überspannen, bzw. sehr kurze Risse nimmt die Abweichung zu. Für Risse mit $a \rightarrow 0$ ist die Abweichung zur numerischen Referenzlösung maximal. Ein Grund liegt darin, dass in diesen Bereichen die Balkentheorie nicht mehr gilt, da die Längen a bzw. $2c-a$ sehr kurz sind. Außerdem werden die Feldgrößen an den Überlappungsenden mit dem Balkenmodell nur ungenügend abgebildet. Mit den Formeln aus Turon et al. (2007) und Harper u. Hallett (2008) kann für den in dieser Arbeit verwendeten Werkstoff Texipreg HS 160 RM eine Entfestigungslänge $l_{cz} \approx 1,0-2,0$ mm angegeben werden. Daher sind auch Risslängen in diesem Bereich relativ großer Abweichungen der inkrementellen Energiefreisetzungsrate zu erwarten. Wegen der quadratischen Proportionalität $\bar{G} \sim P^2$ ist die Übereinstimmung mit den experimentellen Versagenslasten trotzdem sehr gut.

In Abbildung 5.10 sind die auf Grundlage der semi-analytischen Modellierung prognostizierten

Versagenslasten mit den experimentellen Ergebnissen von Ribeiro et al. (2016) verglichen. Die beiden Kurven zeigen die Versagenslasten mit und ohne Berücksichtigung des Mixed-Mode-Verhältnis ϕ . Wird das Mixed-Mode-Verhältnis nicht berücksichtigt $\phi=0$, wird die effektive Bruchzähigkeit $\mathcal{G}_c=\mathcal{G}_{Ic}$ gesetzt. Bei Berücksichtigung des Mixed-Mode-Verhältnis wird dieses aus den Spannungen des Finite-Elemente-Modells nach Gleichung (2.112) bestimmt. Für kurze Überlappungslängen überwiegt der Modus II Beitrag, für lange Überlappungslängen nimmt der Modus I Anteil zu. Die Risslängen liegen für alle Konfigurationen im Bereich $\Delta a=1,10-1,25$ mm. In Anbetracht der starken Vereinfachungen während der Modellierung ist die Übereinstimmung der prognostizierten Versagenslast mit den experimentellen Werten zufriedenstellend. Bei der analytischen Balkenmodellierung hat das Spanningskriterium nahezu keinen Einfluss. Da die inkrementelle Energiefreisetzungsrate im Bereich $\Delta a=0,00-1,25$ mm nur geringfügig zunimmt, hat eine größere Risslänge beinahe keine Auswirkung auf die Versagenslast. Dies ist eine Besonderheit der vereinfachten Modellierung, die schon von Weißgraeber (2014) festgestellt wurde.

5.3.3 Schnittgrößen an den Überlappungsenden

Bei der Analyse von einschnittigen Überlappungsklebung stellen die Schnittkräfte und Schnittmomente an den Enden des Überlappungsbereichs weitere wichtige Größen dar. Diese werden, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, meist mit analytischen Balkenmodellen bestimmt. Da im vorliegenden Balkenmodell zum ersten Mal die Biege-Dehn-Kopplung ohne weitere Einschränkungen an den Aufbau der Klebefügung berücksichtigt ist, werden im Folgenden die Schnittmomente $M^{(1)}(l_1)$ bzw. $M^{(2)}(0)$ mit Ergebnissen der Finite-Elemente-Modellierung und den Ergebnissen anderer Autoren verglichen. Viele Autoren geben zur Bestimmung der Biegemomente einen Faktor k an, der die Biegemomente zur äußeren Last in Beziehung setzt statt die Biegemomente direkt anzugeben. Für eine unausgeglichene Fügung müssen zwei Biegemomentenfaktoren k_1 und k_2 angegeben werden, da in diesem Fall die Biegemomente $M^{(1)}(l_1)$ und $M^{(2)}(0)$ nicht mehr übereinstimmen. Die beiden Biegemomentenfaktoren sind hierbei definiert als das Verhältnis der Biegemomente, die aus den axialen Spannungskomponenten σ_x bzw. der Biegemomente, die aus den Schubspannungskomponenten τ_{xz} resultieren. Die Biegemomentenfaktoren sind somit definiert als:

$$k_1 = \frac{\int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \sigma_x^{(1)}(x_1 = l_1) \cdot z \, dz}{\int_{-c}^c \tau_{xz} \cdot \frac{h_1+t}{2} \, dx} = \frac{M^{(1)}(x_1 = l_1)}{P \left(\frac{h_1+t}{2} \right)} \quad (5.14)$$

$$k_2 = \frac{\int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \sigma_x^{(2)}(x_2 = 0) \cdot z \, dz}{\int_{-c}^c \tau_{xz} \cdot \frac{h_2+t}{2} \, dx} = \frac{M^{(2)}(x_2 = 0)}{P \left(\frac{h_2+t}{2} \right)} \quad (5.15)$$

Die Biegemomentenfaktoren werden meist eingeführt, um das nichtlineare Verhalten der Klebefügung während der Lastaufbringung zu beschreiben. Aufgrund der nichtlinearen Deformation nimmt der Biegemomentenfaktor mit zunehmender Last P ab. Dies führt häufig zur falschen Annahme, dass die Biegemomente ebenfalls mit steigender Last abnehmen. Deshalb werden in den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit die Biegemomente an den Überlappungsenden direkt über der äußeren Last aufgetragen. Zur Wiedererkennung und Einordnung der Arbeit

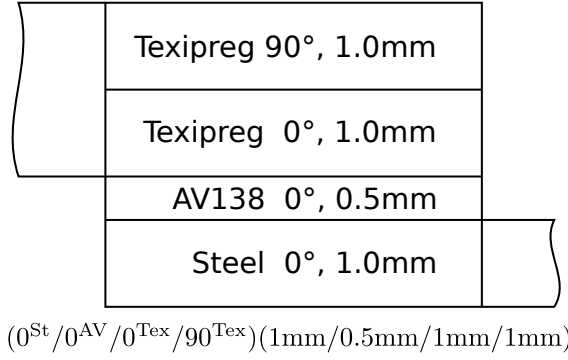


Abbildung 5.11: Laminat-Kodierung für die Überlappungsklebung.

wird an dieser Stelle der Biegemomentenfaktor k für den Spezialfall einer ausgeglichenen Fügung mit identischen Fügeteilen ohne Biege-Dehn-Kopplung angegeben:

$$k = \frac{\cosh\left(\frac{c}{\lambda^{(0)}}\right)}{\cosh\left(\frac{c}{\lambda^{(0)}}\right) + \frac{K_S^{(1)} A_{55}^{(1)} (P - K_S^{(0)} A_{55}^{(0)}) \lambda^{(0)}}{K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} (P - K_S^{(1)} A_{55}^{(1)}) \lambda^{(1)}} \sinh\left(\frac{c}{\lambda^{(0)}}\right)}. \quad (5.16)$$

Die Biegemomente an den Enden des Überlappungsbereichs folgen demnach zu

$$M^{(1)}(l_1) = M^{(2)}(0) = k \frac{h_1 + t}{2} P \quad (5.17)$$

Die Querkräfte können ebenfalls mit dem vorliegenden Modell berechnet werden. Da sie einen geringen Einfluss auf die Spannungen in der Klebschicht haben, werden Sie wie in anderen Arbeiten zum Thema, siehe Abschnitt 3.1, nicht weiter betrachtet. Um einen Überblick über die vielen analytischen Modelle zur Bestimmung der Biegemomente zu bekommen, werden im Folgenden die Einflüsse der geometrischen Abmessungen und der Materialparameter untersucht. Die Biegemomente werden für ausgeglichene Fügungen mit isotropen Fügeteilen, unausgeglichene Fügungen mit isotropen Fügeteilen und für Fügungen mit Fügeteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden verglichen. Die Überlappungsklebung wird hauptsächlich durch den Lagenaufbau im Überlappungsbereich beschrieben. Daneben sind für die vollständige Charakterisierung der Überlappungsklebung noch die Überlappungslänge $2c$ und die überlappungsfreien Fügeteillängen l_1 und l_2 nötig. Der Lagenaufbau im Überlappungsbereich wird im Folgenden in der Laminat-Kodierung angegeben, siehe Abbildung 5.11.

In den nachfolgend vorgestellten Ergebnissen werden die analytischen Ergebnisse als durchgehende Linie aufgetragen und die Referenzlösung aus der Finite-Elemente-Modellierung als gepunktete Linie. Die Breite ist für alle Konfigurationen $b=25$ mm. Verglichen werden immer die Biegemomente an den Überlappungsenden, aufgetragen über der äußeren Last. Der Grund dafür ist, dass die Schnittgrößen an den Überlappungsenden direkt als Randbedingungen für Sandwichmodelle der Klebeverbindung aufgebracht werden können. Stein et al. (2015) nutzt die hier vorgestellte Berechnungsmethode für die Auswertung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums mit einem Sandwich-Modell. Im Rahmen dieser Analyse ist die Vorhersage der Schnittgrößen in einem weiten Bereich der äußeren Lasten nötig.

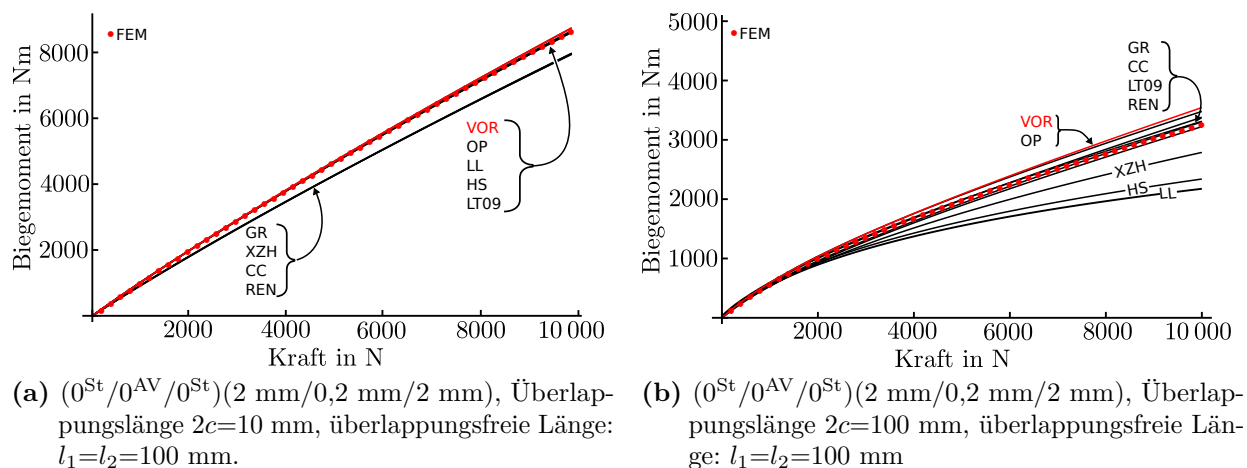


Abbildung 5.12: Vergleich der Biegemomente für zwei ausgeglichene Fügungen.

Ausgeglichene Fügung isotroper Fügeteile

Zuerst soll eine ausgeglichene Fügung $(0^{\text{St}}/0^{\text{AV}}/0^{\text{St}})(2 \text{ mm}/0,2 \text{ mm}/2 \text{ mm})$ mit kurzer Überlappungslänge $2c=10 \text{ mm}$, einer überlappungsfreien Länge $l_1=l_2=100 \text{ mm}$ und den Schubkorrekturfaktoren $K_S^{(1)}=K_S^{(2)}=0,83$ und $K_S^{(0)}=0,18$ untersucht werden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.12a dargestellt. Die Ergebnisse der analytischen Modelle können in zwei Gruppen eingeteilt werden. Die vorliegende Arbeit (VOR), Oplinger (OP), Li und Lee-Sullivan (LL), Hart-Smith (HS) und Luo und Tong (LT09) bilden das Biegemoment sehr gut ab, während die zweite Gruppe Goland und Reissner (GR), Zhao et al. (XZH), Cheng und Chen (CC) und Renton et al. (REN) die Biegemomente unterschätzen. Gemeinsam in der zweiten Gruppe ist, dass die Klebschichtdicke in der Modellierung vernachlässigt wird. Dies führt zu einer geringeren Exzentrizität der Lastangriffspunkte und folglich zu geringeren Biegemomenten. Da für ausgeglichene Fügungen die Biegemomente $M^{(1)}(l_1)$ und $M^{(2)}(0)$ identisch sind, ist nur $M^{(1)}(l_1)$ aufgetragen.

In Abbildung 5.12b wurde die Überlappungslänge auf $2c=100 \text{ mm}$ erhöht, während alle anderen Abmessungen unverändert bleiben. Die analytischen Vorhersagen auf Basis von Balkenmodellen gehen in diesem Fall weit auseinander. Die Mehrschicht-Ansätze von Oplinger und Luo und Tong, siehe Abschnitt 3.1, bilden die Biegemomente für große Überlappungslängen besser ab. Dieses Ergebnis ist zu erwarten, da Mehrschicht-Ansätze den Einfluss der Klebschicht besser abbilden können. Die Klebschicht ist dort als reduziertes Kontinuum modelliert, während für die äquivalenten Einzelschicht Ansätze eine verschmierte Betrachtung des Überlappungsbereichs erfolgt. Für größere Überlappungslängen wirkt sich dieser Unterschied in der Modellierung aus. Die Mehrschicht-Ansätze von Zhao et al., Hart-Smith und Li und Lee-Sullivan vernachlässigen das geometrisch nichtlineare Verhalten für den Überlappungsbereich und unterschätzen die Biegemomente. Im Gegensatz zu den Aussage von Li u. Lee-Sullivan (2006b) scheint es nicht akzeptabel das nichtlineare Verhalten im Überlappungsbereich zu vernachlässigen. Überdies wird von Zhao et al. der Überlappungsbereich als starrer Körper modelliert, was nur für sehr kurze Überlappungslängen oder steife Fügeteile zu rechtfertigen ist. Goland und Reissner, Cheng und Chen und Renton et al. liefern für diesen Fall sehr gute Übereinstimmungen, obwohl die Biegemomente für kurze Überlappungslängen unterschätzt werden. Oplinger und die vorliegende Formulierung überschätzen die Biegemomente etwas, was zu konservativen Ergebnissen für die Versagenslast führt. Oplinger

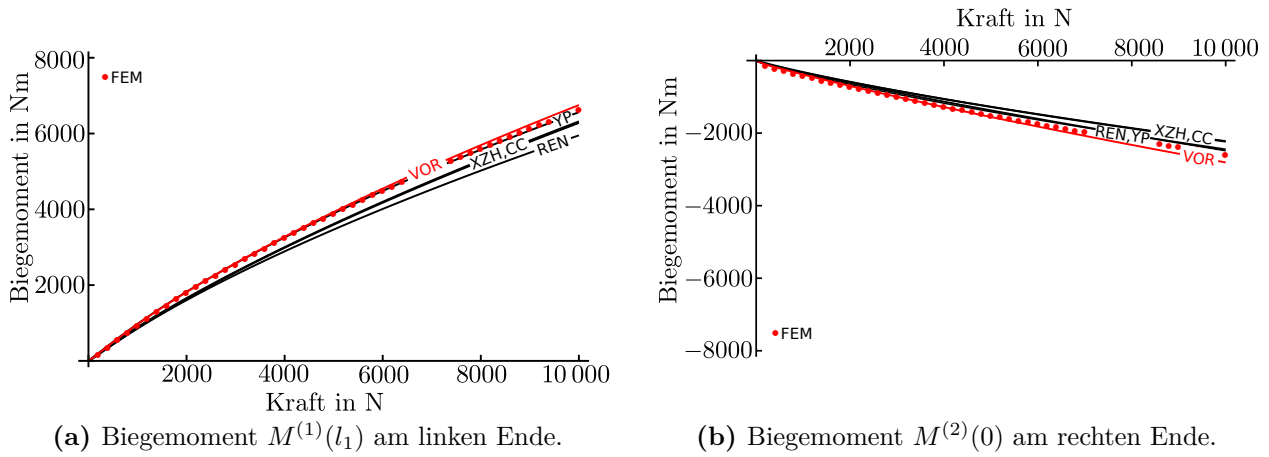


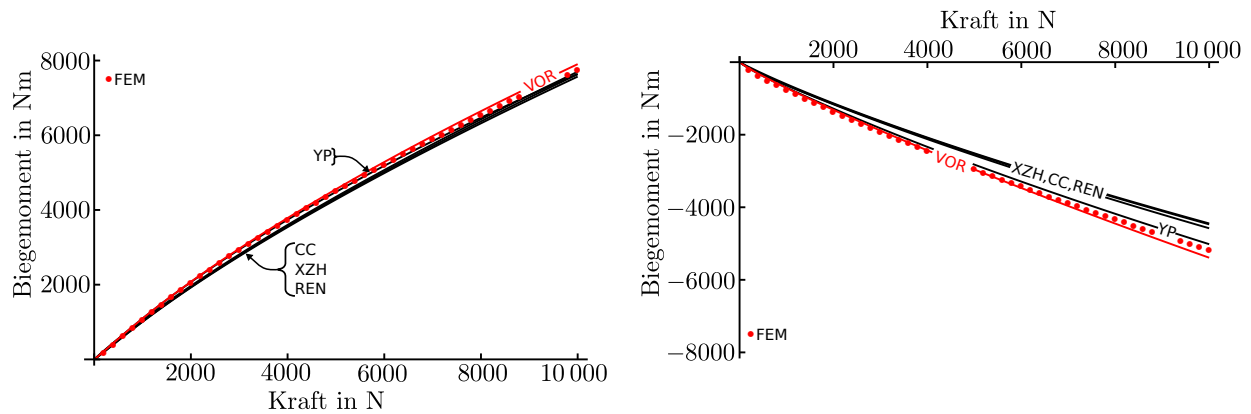
Abbildung 5.13: Vergleich der Biegemomente an den beiden Enden der Überlappung für eine unausgeglichene Fügung ($0^{\text{St}}/0^{\text{AV}}/0^{\text{St}}$)(1 mm/0,2 mm/2 mm), Überlappungslänge $2c=20$ mm, überlappungsfreie Längen $l_1=l_2=100$ mm, Koppelsteifigkeit $B_{11}^{(0)} = -21\,860$ N, Biegesteifigkeiten $D_{11}^{(1)}=149\,451$ Nm, $D_{11}^{(0)}=601\,074$ Nm, $D_{11}^{(2)}=18\,681$ Nm.

und Luo und Tong sind die einzigen Mehrschicht-Ansätze, die das nichtlineare Verhalten im Überlappungsbereich abbilden. Luo und Tong liefern die besten Ergebnisse für ausgeglichene Überlappungsklebung mit isotropen Fügeteile, insbesondere für große Überlappungslängen. Luo und Tongs Modellierung ist allerdings nur für ausgeglichene Fügungen gültig.

Unausgeglichene Fügung isotroper Fügeteile

In der Literatur existieren nur wenige analytische Modellierungsansätze für unausgeglichene Überlappungsklebung, mit welchen die Schnittgrößen an den Überlappungsenden berechnet werden können. Im Folgenden werden drei Modelle mit äquivalenten Einzelschichten namentlich Zhao et al. (XZH), Chen und Cheng (CC) und Renton et al. (REN) und das Mehrschichtmodell von Yang und Pang (YP) mit dem analytischen Balkenmodell der vorliegenden Arbeit und den Ergebnissen der vorliegenden Finite-Elemente-Modellierung verglichen. Für unausgeglichene Fügungen unterscheiden sich die Absolutwerte der Biegemomente an den beiden Überlappungsenden. Deshalb werden im Folgenden die Biegemomente an beiden Enden gezeigt. Für isotrope Fügeteile tritt der höhere Absolutwert immer am Fügeteil mit der höheren Biegesteifigkeit auf. Ein weiterer Aspekt, der bisher bei keiner Modellierung mit äquivalenten Einzelschichten Berücksichtigung findet, ist die Tatsache, dass eine unausgeglichene Fügung auch für isotrope Fügeteil immer eine Biege-Dehn-Kopplung für den Überlappungsbereich aufweist.

Abbildung 5.13 zeigt die Biegemomente an den beiden Überlappungsenden für eine unausgeglichene Überlappungsfügung mit unterschiedlichen Fügeteildicken ($0^{\text{St}}/0^{\text{AV}}/0^{\text{St}}$)(1 mm/ 0,2 mm/ 2 mm). Diese Konfiguration führt zu einer Biege-Dehn-Kopplungssteifigkeit $B_{11}^{(0)}=-21\,860$ N und zu den Schubkorrekturfaktoren $K_S^{(1)}=K_S^{(2)}=0,83$ und $K_S^{(0)}=0,18$. Zu sehen ist, dass die vorliegende Modellierung und das Mehrschichtmodell von Yang und Pang an beiden Überlappungsenden eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Modellierung liefern. Die drei anderen Modelle mit äquivalenten Einzelschichten bilden den



(a) Biegemoment $M^{(1)}(l_1)$ am linken Ende der Überlappung.

(b) Biegemoment $M^{(2)}(0)$ am rechten Ende der Überlappung.

Abbildung 5.14: Vergleich der Biegemomente für eine unausgeglichene Fügung ($0^{Al}/0^{AV}/0^{St}$)(2 mm/0,2 mm/2 mm), Überlappungslänge $2c = 20$ mm, überlappungsfreie Längen $l_1 = l_2 = 100$ mm. Koppelsteifigkeit $B_{11}^{(0)} = -323\,956,0$ N, Biegesteifigkeiten $D_{11}^{(1)} = 149\,451,0$ Nm, $D_{11}^{(0)} = 929\,396,0$ Nm, $D_{11}^{(2)} = 51\,282,0$ Nm.

Einfluss der Biege-Dehnkopplung und den Einfluss der Klebschichtdicke nicht ab. Folglich unterschätzen sie die Biegemomente an beiden Überlappungsenden.

Die zweite unausgeglichene Überlappungsklebung besteht aus Fügeteilen gleicher Fügeteildicke aber mit unterschiedlichem Material, Stahl und Aluminium ($0^{Al}/0^{AV}/0^{St}$)(2 mm/ 0,2 mm/ 2 mm). Dies führt auf eine Biege-Dehn-Koppelsteifigkeit $B_{11}^{(0)} = -323\,956$ N und Schubkorrekturfaktoren $K_S^{(1)} = K_S^{(2)} = 0,83$ und $K_S^{(0)} = 0,26$. Auch für diese Konfiguration stimmen die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit und des Mehrschichtmodells von Yang und Pang sehr gut mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Modellierung überein. Da beide Modelle die Biege-Dehn-Kopplung im Überlappungsbereich abbilden, sind sie gut geeignet, die Schnittgrößen unausgeglichener Konfigurationen vorherzusagen.

Fügung von Faser-Kunststoff-Verbunden

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse für Struktursituationen mit FKV-Fügeteilen vorgestellt. Die untersuchten FKV-Fügeteile sind unsymmetrische Kreuzverbunde mit Biege-Dehnkopplung. Ohne weitere Restriktionen können die Schnittgrößen für diese Struktursituationen nur mit dem vorliegenden Ansatz oder dem Modell von Yang und Pang abgebildet werden. Wird als zusätzliche Restriktion noch hinzugefügt, dass die Klebeverbindung ausgeglichen sein muss, kann zusätzlich das Modell von Luo und Tong verwendet werden. Der Spezialfall einer ausgeglichenen Fügung tritt ein, falls der Lagenaufbau im Überlappungsbereich symmetrisch zur Mittelebene der Klebschicht ist $A_{11}^{(1)} = A_{11}^{(2)}$, $D_{11}^{(1)} = D_{11}^{(2)}$, $B_{11}^{(1)} = -B_{11}^{(2)}$ und $l_1 = l_2$.

Die Ergebnisse der ersten Klebefügung mit FKV-Fügeteilen, ($90^{Tex}/0^{Tex}/0^{AV}/0^{St}$)(1 mm/ 1 mm/ 0,2 mm/ 2 mm), sind in Abbildung 5.15 dargestellt. Da die Biegesteifigkeit des Kreuzverbundes nur ungefähr 25% der Biegesteifigkeit des Stahl-Fügeteils beträgt, wäre damit zu rechnen, dass das Biegemoment am rechten Überlappungsende viel kleiner ist als am linken Ende, so wie es für die Stahl-Aluminium-Fügung in Abbildung 5.14 der Fall ist.

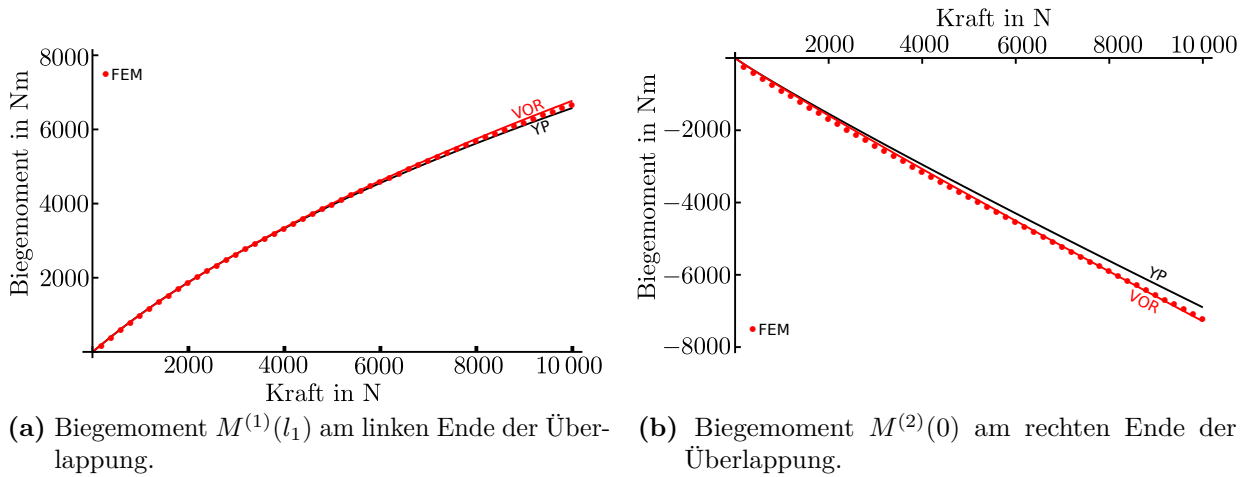


Abbildung 5.15: Vergleich der Biegemomente für eine unausgeglichene Klebefügung mit FKV-Fügeteilen, $(90^{\text{Tex}}/0^{\text{Tex}}/0^{\text{AV}}/0^{\text{St}})(1\text{ mm}/1\text{ mm}/0,2\text{ mm}/2\text{ mm})$, Überlappungslänge $2c = 20\text{ mm}$, überlappungsfreie Längen $l_1 = l_2 = 100\text{ mm}$, Koppelsteifigkeiten $B_{11}^{(1)} = 0,0\text{ N}$, $B_{11}^{(0)} = -412\,917,0\text{ N}$, $B_{11}^{(2)} = -50\,569,0\text{ N}$, Biegesteifigkeiten $D_{11}^{(1)} = 149\,451,0\text{ Nm}$, $D_{11}^{(2)} = 39\,648,0\text{ Nm}$. Die Schubkorrekturfaktoren sind $K_S^{(1)} = 0,83$, $K_S^{(2)} = 0,79$ und $K_S^{(0)} = 0,13$.

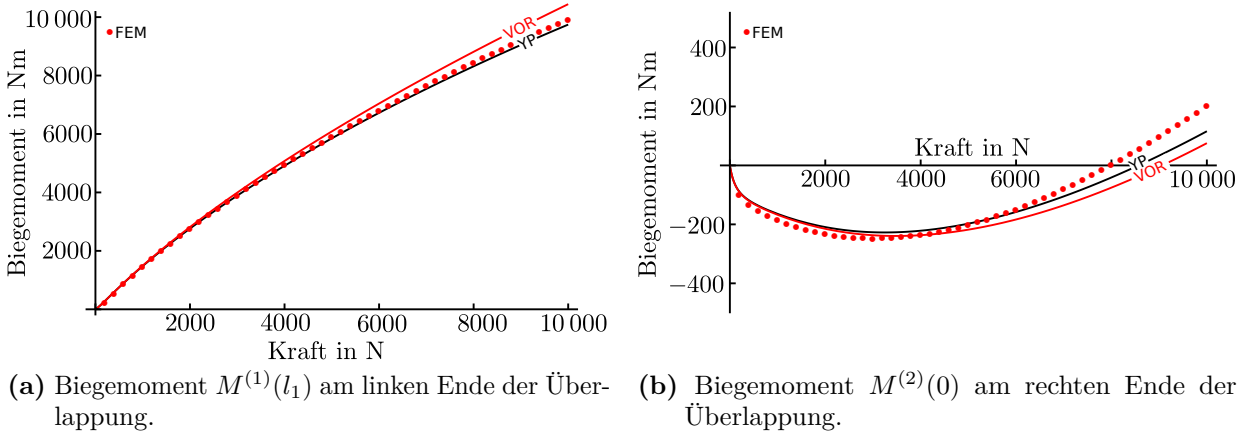


Abbildung 5.16: $(0^{\text{Tex}}/90^{\text{Tex}}/0^{\text{AV}}/0^{\text{St}})(1\text{ mm}/1\text{ mm}/0,2\text{ mm}/2\text{ mm})$, Überlappungslänge $2c = 20\text{ mm}$, überlappungsfreie Länge $l_1 = l_2 = 100\text{ mm}$, Koppelsteifigkeiten $B_{11}^{(1)} = 0,0\text{ N}$, $B_{11}^{(0)} = -311\,779,0\text{ N}$, $B_{11}^{(2)} = 50\,569,0\text{ N}$, Biegesteifigkeiten $D_{11}^{(1)} = 149\,451,0\text{ Nm}$, $D_{11}^{(2)} = 39\,648,0\text{ Nm}$. Schubkorrekturfaktoren $K_S^{(1)} = 0,83$, $K_S^{(2)} = 0,79$ und $K_S^{(0)} = 0,19$.

Bei der vorliegenden Fügung sind die Biegemomente betragsmäßig von gleicher Größe. Der Grund liegt im Konstitutivverhalten des Kreuzverbundes ($M = B_{11}\varepsilon_0 + D_{11}\kappa$). Wegen dem negativen Wert der Biege-Dehn-Koppelsteifigkeit $B_{11}^{(2)}$ und einer positiven Dehnung ε_0 wird ein zusätzlicher Beitrag zum Biegemoment generiert, der im Fall der Stahl-Aluminium-Fügung nicht vorhanden ist.

Wird der Lagenaufbau des Kreuzverbundes gespiegelt, ergibt sich folgende Struktursituation: $(0^{\text{Tex}}/90^{\text{Tex}}/0^{\text{AV}}/0^{\text{St}})(1\text{ mm}/1\text{ mm}/0,2\text{ mm}/2\text{ mm})$. Der gespiegelte Lagenaufbau führt zu einer positiven Biege-Dehn-Koppelsteifigkeit für das untere Fügeteil, alle anderen Kenngrößen bleiben unverändert. In Abbildung (5.16) sind die Ergebnisse für diese Struktursituation ab-

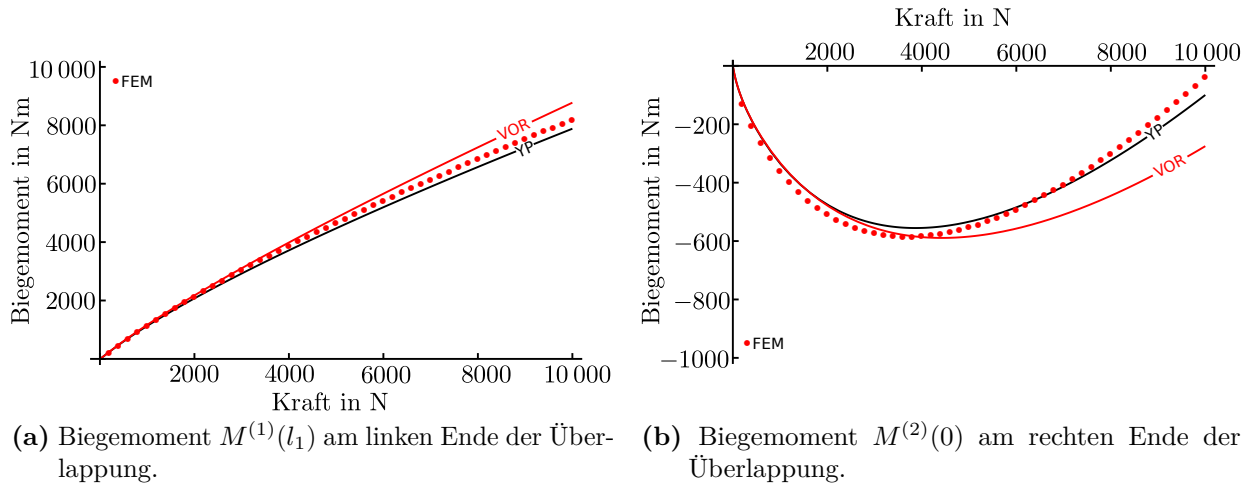


Abbildung 5.17: $(0^{\text{Tex}}/90^{\text{Tex}}/0^{\text{AV}}/0^{\text{Tex}}/90^{\text{Tex}})(1 \text{ mm}/1 \text{ mm}/0,2 \text{ mm}/1 \text{ mm}/1 \text{ mm})$, Überlappungslänge $2c = 20$ mm, überlappungsfreie Länge $l_1 = l_2 = 100$ mm, Biegesteifigkeit $D_{11}^{(1)} = D_{11}^{(2)} = 39\,648,0$ Nm, Koppelsteifigkeit $B_{11}^{(1)} = B_{11}^{(2)} = 50\,569,0$ N, Schubkorrekturfaktor $K_S^{(1)} = K_S^{(2)} = 0,79$, $K_S^{(0)} = 0,64$.

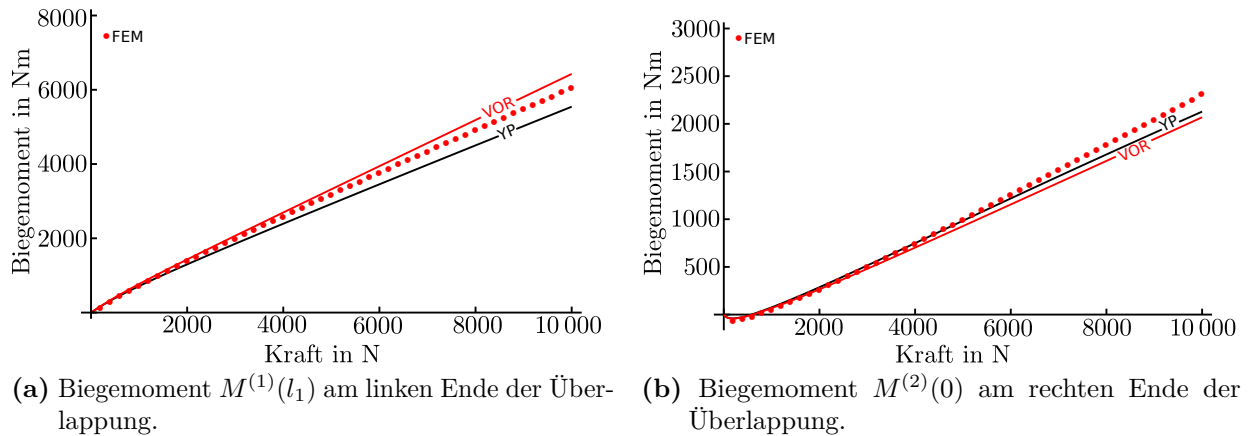


Abbildung 5.18: $(0^{\text{Tex}}/90^{\text{Tex}}/0^{\text{AV}}/0^{\text{Tex}}/90^{\text{Tex}})(1 \text{ mm}/1 \text{ mm}/0,2 \text{ mm}/1 \text{ mm}/1 \text{ mm})$, Überlappungslänge $2c = 100$ mm, überlappungsfreie Länge $l_1 = l_2 = 100$ mm, Biegesteifigkeit $D_{11}^{(1)} = D_{11}^{(2)} = 39\,648,0$ Nm, Koppelsteifigkeit $B_{11}^{(1)} = B_{11}^{(2)} = 50\,569,0$ N, Schubkorrekturfaktor $K_S^{(1)} = K_S^{(2)} = 0,79$, $K_S^{(0)} = 0,64$.

gebildet. Es zeigt sich, dass diese kleine Veränderung des Lagenaufbaus einen großen Einfluss auf die Biegemomente hat. Durch die positive Biege-Dehn-Koppelsteifigkeit wird das Biegemoment am rechten Ende des Überlappungsbereichs reduziert. Mit steigender äußerer Last ist es sogar möglich, dass das resultierende Biegemoment einen Vorzeichenwechsel vollzieht. Dieses nichtlineare Verhalten wird von der vorliegenden Modellierung gut abgebildet.

In den Abbildungen 5.17 und 5.18 sind die Ergebnisse für die Verklebung zweier identischer Kreuzverbunde dargestellt, wobei unterschiedliche Überlappungslängen $2c=20$ mm bzw. $2c=100$ mm betrachtet werden. Obwohl die Fügeteile identisch sind, ist die Verklebung nicht ausgeglichen. Dies zeigt sich, da an den beiden Enden des Überlappungsbereichs betragsmäßig unterschiedliche Biegemomente auftreten. Für identische, isotrope Fügeteile läge eine ausgeglichenen Überlappungsklebung vor. Da aber im Fall von FKV-Fügeteilen der Überlap-

pungsbereich bei der Verklebung identischer Füge­teile in den seltensten Fällen symmetrisch zur Mittelebene der Klebschicht ist, sind diese Fügungen meist unausgeglichen. Sie besitzen folglich eine Biege-Dehn-Kopplung im Überlappungsbereich. Dies führt dazu, dass sich die Biegemomente an den Überlappungsenden unterscheiden, obwohl die Füge­teile identische geometrische Abmessungen und identische Biege-, Dehn- und Koppelsteifigkeiten besitzen. Für große Überlappungslängen wechselt das Biegemoment am rechten Überlappungsende schon für kleine äußere Lasten $P > 600$ N sein Vorzeichen, siehe Abbildung 5.18b. Weiterhin treffen Yang u. Pang (1996, 1993) für kurze Überlappungslängen genauere Vorhersagen als für lange Überlappungslängen. Dies liegt darin begründet, dass bei Yang u. Pang (1996, 1993) das geometrisch nichtlineare Verhalten im Überlappungsbereich nicht modelliert wird. Die experimentellen Untersuchungen von Neto et al. (2012) für eine Überlappungsklebung gleicher Geometrie aber mit Füge­teilen aus unidirektionalen Einzelschichten zeigt eine Versagenslast von $P_f = 4160 \pm 200$ N. Da für FKV-Füge­teile aus unidirektionalen Einzelschichten die höchsten Versagenslasten erreicht werden können, kann davon ausgegangen werden, dass die Vorhersage der Biegemomente höchstens für äußere Lasten $P < 4000$ N relevant sind. In diesem Lastbereich zeigt die vorliegende Modellierung eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Modellierung.

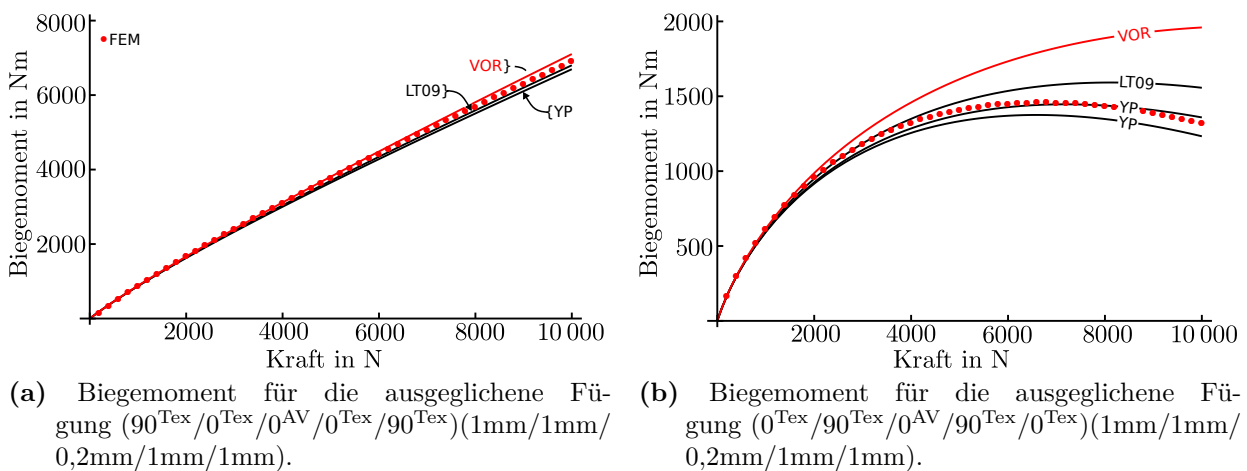


Abbildung 5.19: Ausgegliche­ne Fügungen mit $M^{(1)}(l_1) = M^{(2)}(0)$, Überlappungslänge $2c = 20$ mm, überlappungsfreie Länge $l_1 = l_2 = 100$ mm, Koppelsteifigkeit $B_{11}^{(0)} = 0$ N.

Zuletzt werden noch zwei ausgeglichene Klebverbindungen mit FKV-Füge­teilen diskutiert. In Abbildung 5.19a sind die Ergebnisse für eine Klebfügung zwischen zwei unsymmetrischen Kreuzverbunden mit der 0° -Schicht angrenzend zur Klebschicht und in Abbildung 5.19b mit der 90° -Schicht angrenzend zur Klebschicht dargestellt. Wie für ausgeglichene Fügungen zu erwarten, sind die Biegemomente für die vorliegende Modellierung und die Modellierung von Luo u. Tong (2009) an den beiden Überlappungsenden gleich groß. Die Modellierung von Yang u. Pang (1996, 1993) sagt an den beiden Überlappungsenden unterschiedliche Biegemomente voraus aber zeigt sonst eine gute Übereinstimmung mit den Finite-Elemente-Ergebnissen. Auch für diese beiden Konfigurationen sind aus den selben Gründen wie zuvor wieder höchstens äußere Lasten $P < 4000$ N relevant.

Die Ergebnisse in den Abbildungen 5.17, 5.18, 5.19a und 5.19b zeigen, dass Konfigurationen mit hoher Biege-Dehn-Kopplung in zwei Gruppen eingeteilt werden können. Erhöht die Biege-Dehn-Kopplung das Biegemoment, sind die Ergebnisse in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Referenzlösung. Reduziert die Biege-Dehn-Kopplung das Biegemoment,

wie in Abbildungen 5.17b, 5.18b und 5.19b, nimmt die Vorhersagequalität ab, insbesondere für hohe äußere Lasten. Allerdings ist die Übereinstimmung im technisch relevanten Bereich immer noch zufriedenstellend.

Vergleich der Modellierungsansätze von Yang und Pang bzw. Luo und Tong mit dem vorliegenden Modell

Das Modell von Yang u. Pang (1996, 1993) kann ebenso wie die vorliegende Modellierung für alle einschnittigen Überlappungsklebung unabhängig vom Lagenaufbau verwendet werden. Beide Modellierungsansätze unterscheiden sich aber grundlegend. Das Modell von Yang u. Pang (1996, 1993) ist ein Mehrschichtmodell, wohingegen das vorliegende Modell auf äquivalenten Einzelschichten basiert. Deshalb kann für das vorliegende Modell das geometrisch nichtlineare Verhalten im Überlappungsbereich ohne zusätzlichen Modellierungsaufwand berücksichtigt werden, während es im Modell von Yang u. Pang (1996, 1993) vernachlässigt wird. Des Weiteren ist für das vorliegende Modell eine geschlossen-analytische Lösung möglich, während das Modell von Yang u. Pang (1996, 1993) numerisch gelöst werden muss. Dazu werden die Schälspannungen im Lösungsansatz durch FOURIER-Reihen abgebildet. Außerdem ist in der Modellierung von Yang u. Pang (1996, 1993) eine Fallunterscheidung zwischen Fügeteilen mit Biege-Dehnkopplung $B_{11} \neq 0$ N und Fügeteilen ohne Biege-Dehnkopplung $B_{11} = 0$ N nötig. Die Einarbeitung der 18 Randbedingungen ist für das Mehrschichtmodell ebenfalls nur mit numerischen Lösungsmethoden möglich. Außerdem sind die Biegemomente an den Überlappungsenden in der Modellierung von Yang u. Pang (1996, 1993) nicht explizit angegeben und müssen erst aus der Gesamtlösung für die Klebschichtspannungen extrahiert werden. Aus diesen Gründen ist das Modell von Yang u. Pang (1996, 1993) schwierig zu implementieren und zur alleinigen Bestimmung der Randlasten an den Überlappungsenden ungeeignet.

Das Modell von Luo u. Tong (2009) basiert ebenfalls auf den Modellierungsannahmen der Mehrschichtmodelle. Es ist das einzige Mehrschichtmodell mit FKV-Fügeteilen, das das geometrisch nichtlineare Verhalten im Überlappungsbereich berücksichtigt. Eine geschlossen-analytische Lösung ist aber nur für ausgeglichene Überlappungsklebung möglich. Für die Biegemomente an den Überlappungsenden werden die entsprechenden Biegemomentenfaktoren, siehe Unterabschnitt 5.3.3, angegeben.

Durch den Vergleich der Biegemomente in der vorliegenden Arbeit kann folgende Empfehlung für die Bestimmung der Randlasten gegeben werden. Liegt eine ausgeglichene Fügung mit kurzen Überlappungslängen vor, liefert das Modell von Luo u. Tong (2009) oder das vorliegende Modell sehr gute Vorhersagen für die Randlasten. Für ausgeglichene Fügungen mit großen Überlappungslängen sollte das Modell von Luo u. Tong (2009) verwendet werden. Für unausgeglichene Fügungen liefert das vorliegende Modell in allen untersuchten Konfigurationen gute Vorhersagen in den technisch relevanten Bereichen. Wegen der einfachen Implementierung und der geschlossen-analytischen Lösung können die Schnittgrößen mit dem vorliegenden Modell effizient ermittelt werden.

Einfluss des Lagenaufbaus auf die Biegemomente

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass die mit dem analytischen Balkenmodell berechneten Schnittgrößen gut mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Modellierung über-

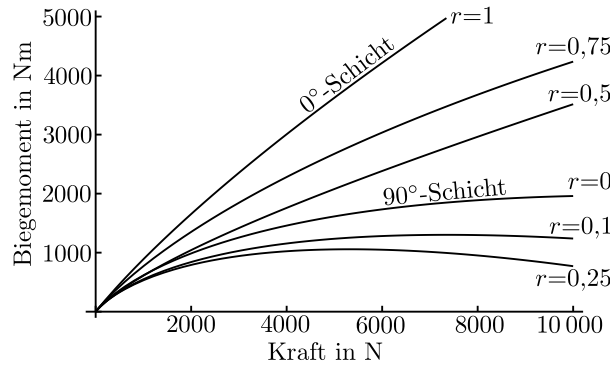


Abbildung 5.20: $(0^{\text{Tex}}/90^{\text{Tex}}/0^{\text{AV}}/90^{\text{Tex}}/0^{\text{Tex}})$ $(r \cdot 2\text{mm}/(1-r) \cdot 2\text{mm}/0,2\text{mm}/(1-r) \cdot 2\text{mm}/r \cdot 2\text{mm})$, Überlappungslänge $2c = 20$ mm, überlappungsfreie Länge $l_1 = l_2 = 100$ mm.

einstimmen. Für FKV-Fügeteile können durch Berücksichtigung der Biege-Dehn-Kopplung im Konstitutivverhalten, $M = B_{11}\varepsilon_0 + D_{11}\kappa$, interessante Effekte beobachtet werden, die eine Erhöhung bzw. Verminderung der Biegemomente ermöglichen.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie das Biegemoment durch den Laminat-Lagenaufbau gezielt beeinflusst werden kann. Beispielsweise soll hier der Lagenaufbau für eine Überlappungsklebung aus Kreuzverbunden darauf optimiert werden, möglichst kleine Biegemomente hervorzurufen, wodurch die Schälspannungen in der Klebschicht reduziert werden können. In Abbildung 5.20 wird hierzu der Einfluss des $0^\circ/90^\circ$ -Schichtdickenverhältnis für einen Kreuzverbund in einer ausgeglichenen Klebung untersucht. Hierbei steht $r=1$ für eine 0° -Einzelschicht und $r=0$ für eine 90° -Einzelschicht. Zu sehen ist, dass das Biegemoment für $r=1$ den größten und für $r=0,25$ den kleinsten Wert annimmt, während die reine 90° -Schicht dazwischen liegt. Der Grund für dieses Verhalten liegt in den zugehörigen Biege- und Biege-Dehn-Koppelsteifigkeiten. Die Biegesteifigkeit besitzt für $r=0$ den größten Wert und nimmt mit Zunahme der 90° -Schicht monoton ab. Für $r=1$ besitzt die Biegesteifigkeit den kleinsten Wert. Aus einer reinen Betrachtung der Biegesteifigkeiten müsste das Biegemoment von $r=0$ zu $r=1$ ebenfalls monoton abnehmen. Das nicht monotone Verhalten kann erst durch Berücksichtigung der Biege-Dehn-Koppelsteifigkeit erklärt werden. Die Biege-Dehn-Koppelsteifigkeit nimmt ihren maximalen Absolutwert mit negativem Vorzeichen für $r=0,5$ an, während für $r=0$ und $r=1$ keine Biege-Dehn-Kopplung vorliegt. Mit der positiven Dehnung $\varepsilon_0 \geq 0$ reduziert sich das Biegemoment durch den Effekt der Biege-Dehn-Kopplung. Dies ist der Grund, weshalb das Biegemoment für $r = [0, 0,25)$ im Vergleich zur reinen 90° -Schicht weiter reduziert werden kann.

5.3.4 Einfluss der Randbedingungen

Der Einfluss der Lagerbedingungen auf das Tragverhalten der einschnittigen Überlappungsklebung wurde schon von mehreren Autoren adressiert. Lai et al. (1996) modellieren eine gerissene Überlappungsklebung mit unterschiedlichen Randbedingungen und berichten einen starken Einfluss der Randbedingungen auf die berechneten Energiefreisetzungsraten. Penado (1998) untersucht den Einfluss unterschiedlicher Lagerbedingungen auf die Randlasten für einschnittige Überlappungsklebung. Die Randlasten werden mit einem geometrisch nichtlinearen Modell berechnet und anschließend in einem linear-elastischen Finite-Elemente-Modell des Überlappungsbereichs aufgebracht. Es wird gezeigt, dass die Qualität der Spannungslösung für dieses Vorgehen nicht von einer geometrisch nichtlinearen Finite-Elemente-Modellierung

als Vollmodell abweicht. Felger et al. (2014) und Weißgraeber et al. (2015) zeigen, dass es einen Maximalwert für die überlappungsfreie Fügeteillänge gibt, ab welcher kein Einfluss mehr auf die Versagenslast einer einschnittigen Überlappungsklebung vorliegt. Diese Länge ist von der geometrischen Struktursituation und den verwendeten Materialien abhängig. Das vorgestellte analytische Modell kann für verschiedene Randbedingungen ausgewertet werden wie zum Beispiel die gelenkig gelagerte oder fest eingespannte einschnittige Überlappungsklebung oder das Reparatur- bzw. Versteifungspflaster. In diesem Abschnitt sollen die Einflüsse der Lagerung auf die Biegemomente untersucht werden. Dazu wird zum einen die gelenkig gelagerte mit der fest eingespannten Überlappungsklebung verglichen und zum anderen wird die feste Einspannung ohne Distanzhalter untersucht und mit den Ergebnissen von Guo et al. (2006) verglichen. Der Einfluss der Randbedingungen ist besonders interessant, da die meisten analytischen Arbeiten der Einfachheit halber eine statisch bestimmte, gelenkige Lagerung modellieren, wohingegen im Experiment eine feste Einspannung vorliegt. Wie groß der hiermit gemachte Fehler ist, hängt maßgeblich von der überlappungsfreien Fügeteillänge ab, da diese dem Abstand zu den Lasteinleitungsstellen entspricht.

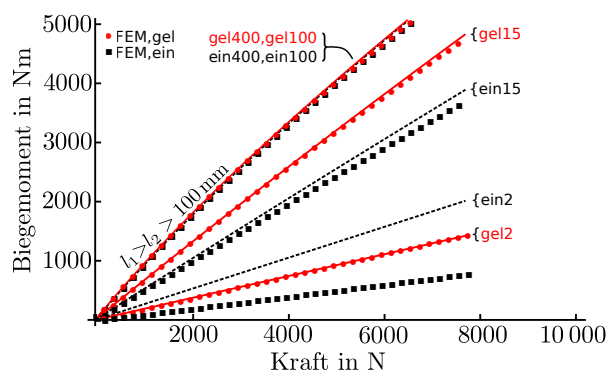


Abbildung 5.21: Einfluss der Lagerung für $(0^{\text{St}}/0^{\text{AV}}/0^{\text{St}})(2\text{ mm}/0,2\text{ mm}/2\text{ mm})$ mit einer Überlappungslänge $2c=20\text{ mm}$ und überlappungsfreien Längen $l_1=l_2=(400,0; 100,0; 15,0; 2,0)\text{ mm}$. gel: gelenkige Lagerung; ein: feste Einspannung.

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Lagerbedingungen je nach Fügeteillänge einen Einfluss auf die Biegemomente an den Überlappungsenden ausüben. Dazu wird der Einfluss der Lagerung auf eine ausgeglichene Stahl-Stahl Klebeverbindung, $(0^{\text{St}}/0^{\text{AV}}/0^{\text{St}})(2\text{ mm}/0,2\text{ mm}/2\text{ mm})$, für verschiedene Fügeteillängen untersucht. Es wird gezeigt, dass für unterschiedliche Lagerungen eine maximale Fügeteillänge vorliegt, die mit dem vorliegenden Modell erfasst werden kann. In Abbildung 5.21 ist zu sehen, dass für große Fügeteillängen $l_1, l_2 > 100\text{ mm}$ kein Einfluss der Lagerung vorhanden ist. Für kleiner werdende Längen nimmt das Biegemoment für die feste Einspannung (ein) ab, während das Biegemoment für die gelenkige Lagerung (gel) unverändert bleibt. Ab einer überlappungsfreien Fügeteillänge von $l_1=l_2 \leq 50\text{ mm}$ ist auch für die gelenkige Lagerung ein Absinken der Biegemomente zu beobachten. Die Ergebnisse der gelenkigen Lagerung zeigen über alle untersuchten Fügeteillängen eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Modellierung. Für die feste Einspannung liegt eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Modellierung nur für Fügeteillängen $l_1=l_2 \geq 10\text{ mm}$ vor. Für die vorliegende Konfiguration liegt das Biegemoment aus der Finite-Elemente-Berechnung für die feste Einspannung immer unterhalb der Ergebnisse für die gelenkige Lagerung. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass für lange Fügeteile kein Einfluss der Lagerung oder der Fügeteillänge vorliegt. Im Gegensatz dazu muss für kurze Fügeteillängen der Einfluss der Lagerung berücksichtigt werden.

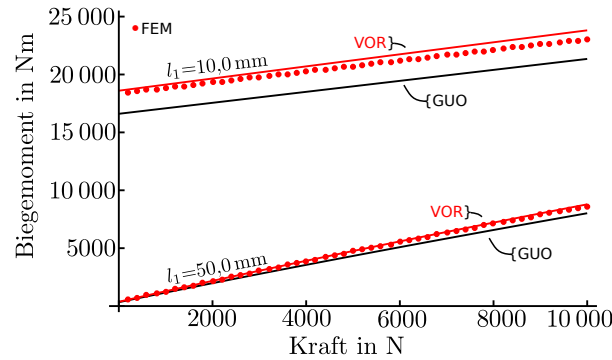


Abbildung 5.22: Einfluss der Distanzhalter für $(0^{\text{St}}/0^{\text{AV}}/0^{\text{St}})(2 \text{ mm}/0,2 \text{ mm}/2 \text{ mm})$ mit einer Überlappungslänge $2c = 20 \text{ mm}$. Ohne Distanzhalter wird durch die Klemmbanken der Zugmaschine im unbelasteten Zustand ein Biegemoment eingeleitet.

Abschließend soll der Einfluss von Distanzhaltern untersucht werden. Ohne Distanzhalter wird durch die Klemmbanken der Zugmaschine im unbelasteten Zustand ein Biegemoment eingeleitet. Diese Konfiguration wurde von Guo et al. (2006) untersucht. Im vorliegenden Modell kann das Fehlen von Distanzhaltern durch die folgenden Randbedingungen berücksichtigt werden: $w_0^{(1)}(x_1=0)=(h_1+2t+h_2)/2$. In Abbildung 5.22 sind zwei Konfigurationen ohne Distanzhalter mit unterschiedlichen Fügeteillängen betrachtet. Für lange Fügeteile ist der Einfluss der Randbedingung wieder vernachlässigbar. Für kurze Fügeteile werden beträchtliche Biegemomente eingeleitet. Die Übereinstimmung der vorliegenden Arbeit mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Methode ist sehr gut.

5.4 Zusammenfassung

Das vorliegende analytische, nichtlineare Balkenmodell kann für unausgeglichene Überlappungsklebung, unter Berücksichtigung von Biege-Dehn-Kopplung in den Fügeteilen, verwendet werden. Durch die Wahl der Randbedingungen können gelenkig gelagerte oder fest eingespannte einschnittige Überlappungsklebung und Versteifungs- bzw. Reparaturpflaster modelliert werden. Für einschnittige Überlappungsklebung kann die Versagenslast infolge interlaminarer Rissbildung mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium vorhergesagt werden. Außerdem können die Randlasten an den Enden des Überlappungsbereichs effizient und mit hoher Qualität bestimmt werden. Somit kann das Balkenmodell gut mit den generalisierten Sandwich-Modellen von Weißgraeber et al. (2014) oder Stein et al. (2015) zur Versagenslastvorhersage kombiniert werden. Weiterhin ist es möglich, die analytisch berechneten Randlasten mit einem linear-elastischen Finite-Elemente-Modell des Überlappungsbereichs zu kombinieren. Durch dieses Vorgehen ist eine effizientere Finite-Elemente-Analyse möglich, da der Überlappungsbereich wegen des geringeren Längen zu Höhen-Verhältnisses des modellierten Bereichs vorteilhaft diskretisiert werden kann. Außerdem kann laut Penado (1998) die Finite-Elemente-Berechnung in diesem Fall linear elastisch erfolgen, da der Einfluss der geometrischen Nichtlinearität in den Randlasten berücksichtigt ist.

Kapitel 6

Rissöffnungsintegral für den finiten Riss im Kontext nichtlinearer Elastizität

In diesem Kapitel wird die Anwendung des Rissöffnungsintegrals auf finite Rissentstehung im Rahmen der nichtlinearen Finite-Elemente-Modellierung untersucht. Durch die lokale Aufspaltung der freigesetzten Energie in die beiden Rissöffnungsmoden kann ein Mixed-Mode-Verhältnis für den finiten Riss und mit diesem ein Energiekriterium unter Berücksichtigung einer gemischten Beanspruchung aufgestellt werden. Im Folgenden wird geometrisch nichtlineares Verhalten und nichtlineares Materialverhalten untersucht.

6.1 Umsetzung im Rahmen der Finite-Elemente-Methode

Aus den Untersuchungen von Weißgraeber u. Becker (2013) und Stein et al. (2015) zu Überlappungsklebungen ist bekannt, dass Rissinitiierung in der Klebschicht unter einer gemischten Beanspruchung stattfindet. Die Untersuchungen von Tong (1998) für Füge-teile mit einem interlaminaren Riss zeigen, dass dieser ebenfalls unter einer gemischten Beanspruchung steht. Im Rahmen einer Finite-Elemente-Modellierung ist es möglich, die gemischte Beanspruchung bei der Versagenslastvorhersage zu berücksichtigen. Dazu muss die freigesetzte Energie in die einzelnen Rissöffnungsmoden aufgeteilt werden. Hierzu eignet sich das Rissöffnungsintegral (RÖI). Da das Rissöffnungsintegral in der bekannten linear-elastischen Bruchmechanik ausschließlich in seiner linearisierten Form angewandt wird, soll in diesem Kapitel die Anwendung im Gebiet der nichtlinearen Elastizität diskutiert werden.

Die Grundlagen für das Rissöffnungsintegral wurden bereits in Kapitel 2.4 dargelegt. Den größten Anwendungsbereich erfährt das Rissöffnungsintegral in der Finite-Elemente-Modellierung. Dort kann es mit Knotenkräften und Knotenverschiebungen formuliert werden, siehe Rybicki et al. (1977). Nach Krueger (2004), Krueger et al. (2003) ist es bekannt, dass die Kraft- und Verschiebungsgrößen für den Fall der geometrischen Nichtlinearität in ein gedrehtes Koordinatensystem mit Ursprung an der Risspitze transformiert werden müssen. In Talmon l'Armée et al. (2017) wird gezeigt, dass es im Rahmen der nichtlinearen Elastizität vorkommen kann, dass die Linearisierung des Rissöffnungsintegrals nicht mehr zulässig ist. Ist dies der Fall, müssen zur Auswertung des Rissöffnungsintegrals die Knotenkräfte entlang der Rissflanken quasistatisch reduziert werden. So kann der gegebenenfalls nichtlineare Zusammenhang zwischen Knotenkräften und -verschiebungen während der Rissöffnung vollkommen berücksichtigt werden. Ob die Linearisierung des Rissöffnungsintegrals aus Gleichung (2.91) im Falle der nichtlinearen Elastizität angewandt werden kann muss für den Einzelfall geprüft werden. Im Folgenden wird die Auswertung des Rissöffnungsintegrals im Rahmen der nichtlinearen Elastizität eingeführt und danach auf die einschnittige Überlappungsklebung angewandt.

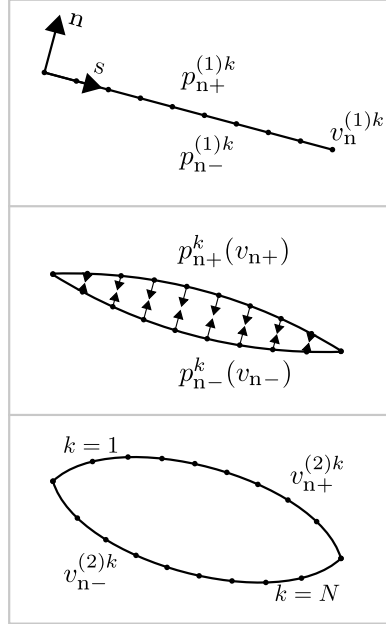


Abbildung 6.1: Rissöffnung in einem gedrehten n - s -Koordinatensystem für reinen Modus I.

Um das Rissöffnungsintegral für die nichtlineare Elastizität anzupassen, müssen drei Rechenschritte ausgeführt werden. In einem ersten Rechenschritt muss die ungerissene Struktur unter einer äußeren Belastung analysiert werden, wobei die Schnittlasten entlang des potentiellen Risspfads ermittelt werden. Danach kann die Struktur mit Riss untersucht werden. Diese wird im zweiten Rechenschritt wieder mit derselben äußeren Last beaufschlagt, während die Rissflanken durch Aufbringen der Schnittlasten aus dem ersten Rechenschritt geschlossen gehalten werden. Im dritten Rechenschritt werden die Rissflanken quasistatisch entlastet und so der Zusammenhang der Rissflankenbelastung mit den Rissflankenverschiebungen hergestellt. Im Rahmen der Finite-Elemente-Modellierung entsprechen die Rissflankenbelastungen den Knotenkräften entlang der Rissflanken und die Rissflankenverschiebungen entsprechen den dazugehörigen Knotenverschiebungen. In Abbildung 6.1 ist die quasistatische Reduktion der Knotenkräfte entlang der Rissflanke für eine reine Modus I Belastung veranschaulicht. Im allgemeinen liegt eine gemischte Beanspruchung mit den Kräften $p_{n+}^{(1)k} = -p_{n-}^{(1)k}$ normal auf die Rissflanken bzw. $p_{s+}^{(1)k} = -p_{s-}^{(1)k}$ tangential auf die Rissflanken vor. Die beiden Rissflanken werden durch ein $+$ für die obere Rissflanke und ein $-$ für die untere Rissflanke unterschieden. Auf dem geschlossenen Riss befinden sich jeweils $k = 1 \dots N$ koinzidente Knotenpaare auf den gegenüberliegenden Rissflanken. Während der quasistatischen Reduktion dieser Kräfte entsteht der Zusammenhang der Knotenkräfte als Funktion der Knotenverschiebungen, $p_{n+}^k(v_{n+}^k)$ bzw. $p_{s+}^k(u_{s+}^k)$ für die obere Rissflanke und $p_{n-}^k(v_{n-}^k)$ bzw. $p_{s-}^k(u_{s-}^k)$ für die untere Rissflanke. Im allgemeinen kann ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen den Knotenkräften und -verschiebungen auftreten. Für den vollständig geöffneten Riss sind die Rissflanken entlastet und es wirken dort keine Kräfte mehr. In diesem Endzustand sind die Knotenverschiebungen der gegenüberliegenden Knoten $v_{n+}^{(2)k}$ und $v_{n-}^{(2)k}$ und die Rissöffnung kann mit $\Delta v_n^{(2)k} = v_{n+}^{(2)k} - v_{n-}^{(2)k}$ bzw. $\Delta u_s^{(2)k} = u_{s+}^{(2)k} - u_{s-}^{(2)k}$ beschrieben werden. Nach dem quasistatischen Entlastungsvorgang sind die Funktionen $p_{n+}^k(v_{n+}^k)$, $p_{n-}^k(v_{n-}^k)$, $p_{s+}^k(u_{s+}^k)$ und $p_{s-}^k(u_{s-}^k)$ bekannt und können mit dem Rissöffnungsintegral ausgewertet werden.

Das Rissöffnungsintegral wird nun ausgeführt, indem alle Knotenkräfte zugehörig zu den beiden Rissflanken über die Knotenverschiebungen aufintegriert werden und anschließend die

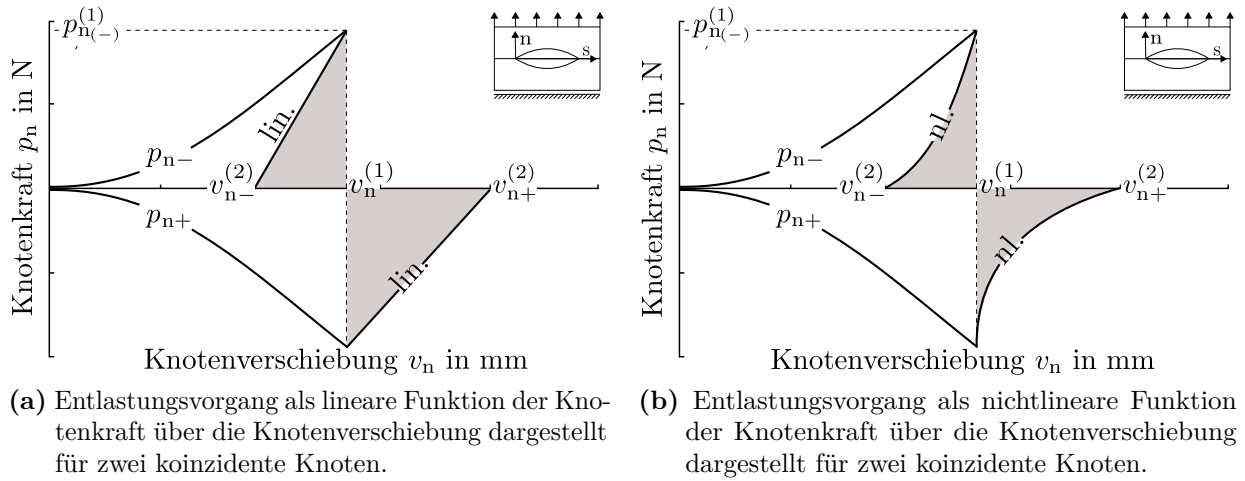


Abbildung 6.2: Vergleich von einem linearisierten und dem tatsächlich vorliegenden, nichtlinearen Entlastungsvorgang.

einzelnen Beiträge aller $k=1 \dots N$ Knotenpaare aufsummiert werden. Wird noch durch die neu entstandene Rissfläche $\Delta A = b \Delta a$ dividiert, ergibt sich somit aus den Gleichungen (2.90) die folgende Form für die nach Rissöffnungsmoden getrennte inkrementelle Energiefreisetzungsrates:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}_I &= \frac{1}{b \Delta a} \sum_{k=1}^N \left[\int_{v_n^{(1)k}}^{v_n^{(2)k}} p_{n+}^k(\tilde{v}_{n+}^k) d\tilde{v}_{n+}^k + \int_{v_n^{(1)k}}^{v_n^{(2)k}} p_{n-}^k(\tilde{v}_{n-}^k) d\tilde{v}_{n-}^k \right], \\ \bar{\mathcal{G}}_{II} &= \frac{1}{b \Delta a} \sum_{k=1}^N \left[\int_{u_s^{(1)k}}^{u_s^{(2)k}} p_{s+}^k(\tilde{u}_{s+}^k) d\tilde{u}_{s+}^k + \int_{u_s^{(1)k}}^{u_s^{(2)k}} p_{s-}^k(\tilde{u}_{s-}^k) d\tilde{u}_{s-}^k \right]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Hierbei steht p_n , v_n für Knotenkräfte bzw. -verschiebungen normal zu den Rissflanken und p_s , u_s für Knotenkräfte bzw. -verschiebungen tangential zu den Rissflanken.

Die Auswirkungen der Integration im Rissöffnungsintegral sollen noch einmal in Abbildung 6.2 veranschaulicht werden. Zu sehen ist der Unterschied zwischen einem linearisierten und dem tatsächlich vorliegenden, nichtlinearen Entlastungsvorgang für eine reine Modus I Belastung. Zur Vereinfachung wird nur die Entwicklung der Knotenkräfte und Knotenverschiebungen für ein einzelnes koinzidentes Knotenpaar während dem Aufbringen der äußeren Belastung und der anschließenden Entlastung der Rissflanken verfolgt. In beiden Fällen bleibt der Riss geschlossen während die äußere Last aufgebracht wird. Hierbei erfahren die koinzidenten Knoten dieselbe Verschiebung bis zum Endwert $v_n^{(1)}$. Die sich entwickelnden Knotenkräfte sind betragsmäßig gleich groß, zeigen aber in entgegengesetzte Richtung, weshalb sich ein unterschiedliches Vorzeichen $p_{n+}^{(1)} = -p_{n-}^{(1)}$ ergibt. Die Knotenkräfte auf den Rissflanken werden nun quasistatisch auf Null reduziert, während die äußere Belastung aufrecht erhalten bleibt. Dies führt dazu, dass sich der Knoten auf der oberen Rissflanke nach $v_{n+}^{(2)}$ bewegt und der Knoten auf der unteren Rissflanke entsprechend auf $v_{n-}^{(2)}$. Die während des Entlastungsvorganges freigesetzte Energie ist in der linearisierten Betrachtung in Abbildung 6.2a und in der tatsächlich vorliegenden, nichtlinearen Betrachtung in Abbildung 6.2b als graue Fläche hinterlegt. Erfolgt der Entlastungsvorgang linear, ergibt sich eine Dreiecksfläche und das Rissöffnungsintegral,

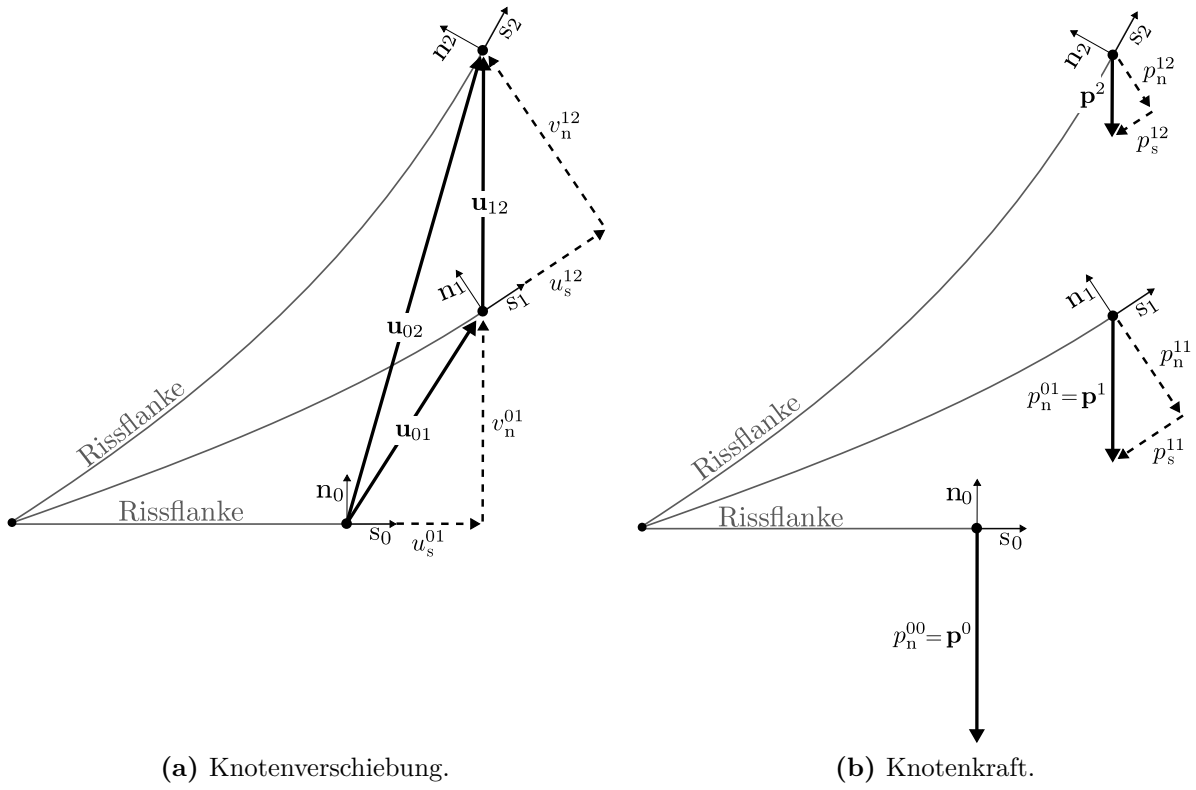


Abbildung 6.3: Betrachtung in einem mit dem Knoten mitbewegten Koordinatensystem.

Gleichung (6.1), kann linearisiert ausgeführt werden. Dies entspricht einer Multiplikation der Knotenkräfte im ungerissenen Zustand (1) mit den Knotenverschiebungen im gerissenen Zustand (2). Für den linearen Entlastungsvorgang kann somit der aus der linear-elastischen Bruchmechanik bekannte Zusammenhang verwendet werden:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{G}}_I &= \frac{1}{2b\Delta a} \sum_{k=1}^N \left[p_n^{(1)k} \left(v_{n+}^{(2)k} - v_{n-}^{(2)k} \right) \right], \\ \bar{\mathcal{G}}_{II} &= \frac{1}{2b\Delta a} \sum_{k=1}^N \left[p_s^{(1)k} \left(u_{s+}^{(2)k} - u_{s-}^{(2)k} \right) \right].\end{aligned}\tag{6.2}$$

Ist der Zusammenhang der Knotenkräfte und -verschiebungen während der Entlastung nichtlinear, muss die Integration aus Gleichung (6.1) ausgeführt werden. Im in Abbildung 6.2 dargestellten Fall würde die Energiefreisetzung durch eine Linearisierung überschätzt. Falls die Rissflanken während der Rissöffnung sehr große Verschiebungen erfahren, kann es für die Aufspaltung in Anteile normal und tangential zur Rissflanke nötig sein, in jedem Knoten ein lokales Koordinatensystem mitzuführen. Dies kann beispielsweise bei der Anwendung des Rissöffnungsintegrals in einem sehr weichen hyperelastischen Material wie beispielsweise Silikon der Fall sein.

In Abbildung 6.3 ist ein solcher stark nichtlinearer Entlastungsvorgang mit großen Verschiebungen für einen einzelnen Knoten auf der Rissflanke dargestellt. In den Unterabbildungen 6.3a und 6.3b wird die Transformation der Knotenverschiebungen und -kräfte in einem mitbewegten lokalen Koordinatensystem für zwei diskrete Rechenschritte veranschaulicht. Der Verschiebungsvektor \underline{u} wie auch der Kraftvektor \underline{p} kann so für jeden Zwischenschritt während des Entlastungsvorganges in seine Komponenten normal und tangential zur Rissflanke

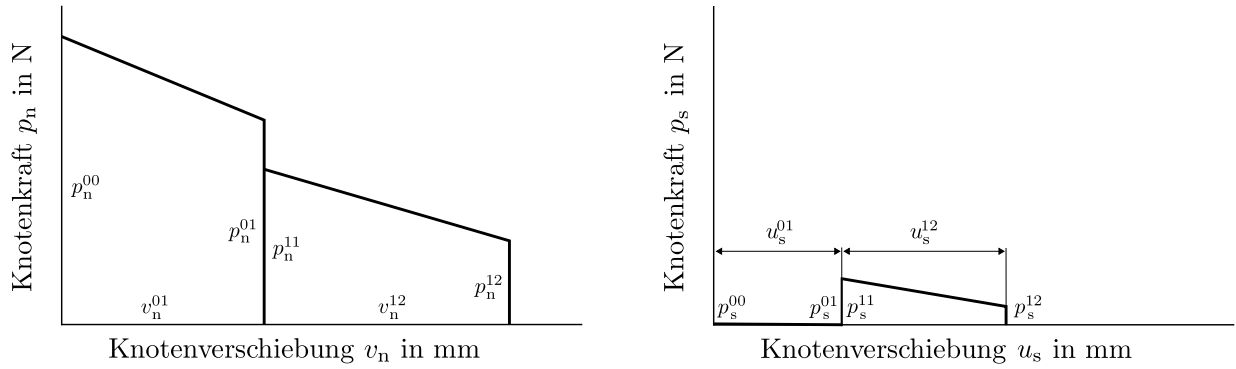


Abbildung 6.4: Knotenkraft p_n aufgetragen über der Knotenverschiebung v_n .

aufgespalten werden. Für den ersten Rechenschritt wird das Koordinatensystem $(\mathbf{n}_0, \mathbf{s}_0)$ verwendet. In diesem kann der Verschiebungsvektor \mathbf{u}_{01} in die beiden Komponenten v_n^{01} und u_s^{01} normal und tangential zur Rissflanke aufgespalten werden. Der Kraftvektor wird im ersten Rechenschritt von \mathbf{p}^0 auf \mathbf{p}^1 reduziert was im $(\mathbf{n}_0, \mathbf{s}_0)$ -Koordinatensystem einer reinen Modus I Belastung, normal zur Rissflanke entspricht. Der nachfolgende Rechenschritt wird im $(\mathbf{n}_1, \mathbf{s}_1)$ -Koordinatensystem betrachtet. Durch den Übergang vom $(\mathbf{n}_0, \mathbf{s}_0)$ in das $(\mathbf{n}_1, \mathbf{s}_1)$ -Koordinatensystem tritt im neuen Koordinatensystem neben der Komponente p_n^{11} , normal zu den Rissflanken, auch eine Komponente p_s^{11} , tangential zu den Rissflanken, auf. Auf diese Weise wird bei der Betrachtung in einem lokalen, mitbewegten Koordinatensystem die freigesetzte Energie zwischen den Rissöffnungsmoden normal und tangential zu den Rissflanken aufgeteilt. Der Übersichtlichkeit halber werden in Abbildung 6.3 nur die Übergänge für zwei Zwischenschritte gezeigt. Es ist deutlich zu sehen, wie eine Knotenkraft, die im globalen System eine reine Modus I Belastung darstellt, wegen der großen Deformation auch Beiträge tangential zur Rissflanke erzeugt.

Abschließend werden in Abbildung 6.4 die Auswirkungen des lokalen mitbewegten Koordinatensystems auf die Integration der Komponenten normal und tangential zur Rissflanke für zwei Rechenschritte veranschaulicht. Durch die stringente Aufteilung der Vektorgößen in Anteile normal bzw. tangential zur Rissflanke wird die freigesetzte Energie ebenfalls in Anteile normal bzw. tangential zur Rissflanke aufgeteilt. Zu sehen ist dies in Abbildung 6.4 beim Übergang vom $(\mathbf{n}_0, \mathbf{s}_0)$ in das $(\mathbf{n}_1, \mathbf{s}_1)$ -Koordinatensystem. Durch diesen Übergang wird der Anteil des Kraftvektors normal zur Rissflanke von p_n^{01} auf p_n^{11} reduziert, während der Anteil tangential zur Rissflanke von $p_s^{01}=0$ auf p_s^{11} erhöht wird. So zeigt sich in diesem Minimalbeispiel, dass eine reine Modus I Belastung im globalen System im mitbewegten System Anteile normal und tangential zur Rissflanke erzeugen kann und somit zu einer gemischten Belastung der Rissflanken führen kann. Die Anzahl der Zwischenschritte, die zur vollständigen Entlastung der Rissflanken nötig sind, ergibt sich aus der Größe der diskreten Pseudozeitschritte, die zur Lösung des nichtlinearen Finite-Elemente-Modells nötig sind. Im Grenzfall mit Pseudozeitschritten $\Delta t \rightarrow 0$ würde die Anzahl der Zwischenschritte $n_{Zw} \rightarrow \infty$ gehen und folglich ein kontinuierlicher Verlauf $p_n(v_n)$ resultieren.

An dieser Stelle sollte darauf hingewiesen werden, dass dieses Vorgehen eine konsistente Fortsetzung der linear-elastischen Bruchmechanik auf nichtlinear elastische Fälle darstellt. Die Beiträge zu den einzelnen Rissöffnungsmoden bestimmten sich aus Anteilen, die während der Rissöffnung normal bzw. tangential zur Rissflanke stehen. Trotzdem muss dieses Vorgehen noch durch experimentelle Untersuchungen bestätigt werden. Da die freigesetzte Energie nun nach

Rissöffnungsmoden getrennt vorliegt, können unterschiedliche Formulierungen für das Mixed-Mode-Verhältnis und die Auswirkung auf ein zu formulierendes Energiekriterium untersucht werden. Dazu werden im nächsten Unterkapitel zunächst verschiedene Formulierungen für das Mixed-Mode-Verhältnis vorgestellt und in ein Energiekriterium eingesetzt.

6.2 Mixed-Mode-Verhältnis

Im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM) ist das Mixed-Mode-Verhältnis für den Beanspruchungszustand an der Rissspitze über die differentiellen Energiefreisetzungsraten definiert. Soll der Begriff des Mixed-Mode-Verhältnis für die finite Bruchmechanik erweitert werden, ergeben sich eine Vielzahl an Möglichkeiten. Initiiert ein Riss finiter Länge, gibt es keinen eindeutigen Ort, wie die Rissspitze in der LEBM, bezüglich dessen das Mixed-Mode-Verhältnis angegeben werden kann. Stattdessen können die möglichen Formulierungen in zwei Gruppen eingeteilt werden. Das Mixed-Mode-Verhältnis kann für den finiten Riss punktweise/lokal oder gemittelt/global aufgestellt werden. In der punktwisen/lokalen Formulierung wird das Mixed-Mode-Verhältnis $\phi(a)$ für jeden Zwischenzustand bis zum Erreichen der finiten Risslänge Δa berücksichtigt. Zur energetischen Bewertung eines finiten Risses muss folglich noch über die finite Risslänge gemittelt werden. Dies kann beispielsweise bei der Ermittlung der effektiven Bruchzähigkeit $\bar{\mathcal{G}}_c(\Delta a)$ nach Gleichung (2.120) geschehen. In der gemittelten/globalen Formulierung wird direkt ein gemitteltes Mixed-Mode-Verhältnis $\bar{\phi}(\Delta a)$ für den gesamten finiten Riss angegeben. Dies führt auf eine für den finiten Riss spezifische effektive Bruchzähigkeit $\mathcal{G}_c(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \bar{\phi}(\Delta a))$. In dieser Arbeit werden unterschiedliche Formulierungen auf Basis der Energiefreisetzungsraten bzw. des Spannungszustandes verwendet. Diese lauten:

Punktweise/Lokal:

$$\phi_{\mathcal{G}}(a) = \frac{\mathcal{G}_{II}(a)}{\mathcal{G}_I(a) + \mathcal{G}_{II}(a)}, \quad (6.3)$$

$$\phi_{\bar{\mathcal{G}}}(a) = \frac{\bar{\mathcal{G}}_{II}(a)}{\bar{\mathcal{G}}_I(a) + \bar{\mathcal{G}}_{II}(a)}, \quad (6.4)$$

$$\phi_{\sigma}(a) = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\tau(\tilde{a})}{< \sigma_n(\tilde{a}) >} \right) d\tilde{a}, \quad (6.5)$$

$$\phi_{\hat{\sigma}}(a) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\tau(a + l^*)}{< \sigma_n(a + l^*) >} \right), \quad (6.6)$$

Gemittelt/Global:

$$\bar{\phi}_{\bar{\mathcal{G}}}(\Delta a) = \frac{\bar{\mathcal{G}}_{II}(\Delta a)}{\bar{\mathcal{G}}_I(\Delta a) + \bar{\mathcal{G}}_{II}(\Delta a)}. \quad (6.7)$$

Die punktwisen Formulierungen basieren auf den Energiefreisetzungsraten oder dem Spannungszustand, die gemittelte Formulierung basiert auf Grundlage der inkrementellen Energiefreisetzungsraten für den finiten Riss.

Die erste punktweise Formulierung in Gleichung (6.3) basiert auf den differentiellen Energiefreisetzungsraten der gerissenen Zwischenzustände, die bei der finiten Rissentstehung virtuell

durchlaufen werden. Somit werden ausschließlich Beanspruchungszustände für die entsprechenden Risspitzen betrachtet, was der Definition des Moden-Mix-Winkels aus der LEBM sehr nahe kommt. Im Energiekriterium in Gleichung (2.121) liegt mit dieser Formulierung ebenfalls eine gute Übereinstimmung der Terme links und rechts des Vergleichszeichens vor. Die Terme auf beiden Seiten sind hier ausschließlich Funktionen der differentiellen Energiefreisetzungsraten für die Risspitzen der gerissenen Zwischenzustände.

Die zweite punktweise Formulierung in Gleichung (6.4) basiert direkt auf den inkrementellen Energiefreisetzungsraten für die gerissenen Zwischenzustände. Dies entspricht einer kumulierten Mittelung für jeden Zwischenzustand bis zum Erreichen des Endwertes Δa .

Die dritte punktweise Formulierung in Gleichung (6.5) basiert auf dem Spannungszustand entlang der gedachten Rissflanken in der ungerissenen Struktur. Dies entspricht dem Vorgehen in García u. Leguillon (2012).

Die vierte punktweise Formulierung in Gleichung (6.6) basiert auf dem Spannungszustand im Abstand l^* von der Risspitze der gerissenen Zwischenzustände in Anlehnung an Mantič (2009). In der Arbeit von Mantič (2009) wurde das Mixed-Mode-Verhältnis direkt für den finiten Riss angegeben, ohne die Zwischenzustände zu berücksichtigen. Für $a=\Delta a$ ist somit die Formulierung von Mantič (2009) enthalten. Die kritische Länge l^* ist ein unbekannter Längenparameter und wird willkürlich zu einer Elementkantenlänge gesetzt.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, direkt die nach Moden getrennte inkrementelle Energiefreisetzungsraten für den finiten Riss der Länge Δa zu verwenden. Dieses Vorgehen führt zu einer gemittelten Formulierung für das Mixed-Mode-Verhältnis in Gleichung (6.7)

Für die punktweisen Formulierungen wird die Mittelung erst bei der Bestimmung der effektiven Bruchzähigkeit ausgeführt. Deshalb folgt aus dem Energiekriterium eine gemittelte effektive Bruchzähigkeit $\bar{\mathcal{G}}_c$ in folgender Form:

$$\frac{1}{\Delta a} \int_a^{a+\Delta a} \mathcal{G}(\tilde{a}) d\tilde{a} \geq \frac{1}{\Delta a} \int_a^{a+\Delta a} \mathcal{G}_c(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \phi(\tilde{a})) d\tilde{a} \quad (6.8)$$

$$\bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \bar{\mathcal{G}}_c(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \Delta a)$$

Wird eine gemittelte Formulierung für das Mixed-Mode-Verhältnis verwendet kann die effektive Bruchzähigkeit im Energiekriterium direkt in folgender Form angegeben werden:

$$\bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \bar{\phi}(\Delta a)) \quad (6.9)$$

6.3 Ergebnisse für das Rissöffnungsintegral in der nichtlinearen Elastizität

Im Folgenden werden zwei Versagensmoden der einschnittigen Überlappungsklebung näher untersucht. Diese sind die Rissinitiierung im Klebstoff ausgehend von der Bi-Materialkerbe und interlaminaire Rissbildung vom gegenüberliegenden Rand. Für diese Fälle wird das Rissöffnungsintegral ausgewertet und der Linearisierungsfehler bestimmt. Es werden die Auswirkungen der geometrischen Nichtlinearität und die Auswirkungen von nichtlinearem Materialverhalten untersucht. Um den Einfluss der geometrischen Nichtlinearität für die einschnittige Überlappungsklebung zu erhöhen, werden große Klebschichtdicken und kleine

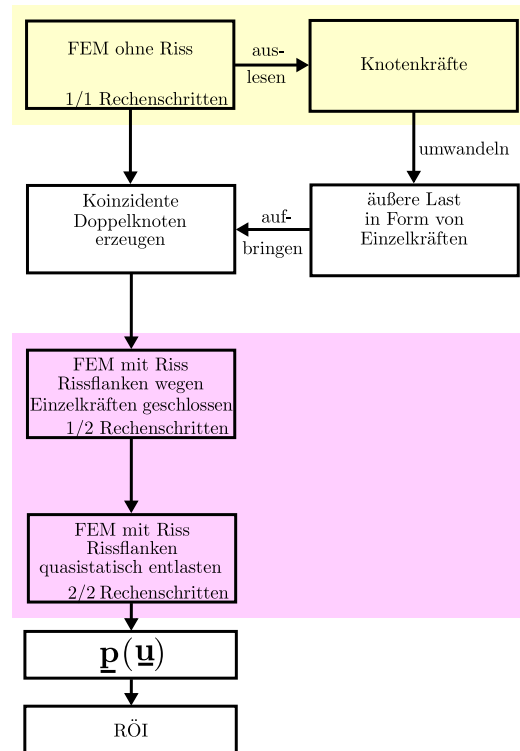


Abbildung 6.5: Das Flussdiagramm veranschaulicht das Vorgehen für das Rissöffnungsintegral.

Fügeteilhöhen verwendet. Der Einfluss von nichtlinearem Materialverhalten wird für das hyperelastische Material Silikon DC993 untersucht. Alle Auswertungen des Rissöffnungsintegrals werden mit dem Finite-Elemente-Modell aus Kapitel 4.2 durchgeführt. Einzig für das hyperelastische Material DC993 muss das Finite-Elemente-Modell angepasst werden, indem für die Klebschicht EVZ-Viereckselemente mit quadratischen Ansatzfunktionen und hybrider Elementformulierung (CPE8H in Abaqus 2016) verwendet werden.

Bevor der Linearisierungsfehler für verschiedene Struktursituationen untersucht wird, soll an dieser Stelle aufgezeigt werden, weshalb im Feld der nichtlinearen Elastizität vor jeder umfangreichen Untersuchung finiter Risse abgeklärt werden sollte, ob das Rissöffnungsintegral linearisiert werden darf. Dazu sind im Flussdiagramm in Abbildung 6.5 noch einmal die einzelnen Schritte zur Auswertung des Rissöffnungsintegrals (RÖI) mit der Finite-Elemente-Methode dargestellt.

Zuerst muss eine Finite-Elemente-Analyse mit einem Rechenschritt für den ungerissenen Zustand durchgeführt werden, um die Knotenkräfte, welche nötig sind einen potentiellen Riss geschlossen zu halten, zu berechnen. Darauf folgend wird ein Riss mit koinzidenten Knotenpaaren erzeugt und die Knotenkräfte in äußere Punktlasten umgewandelt. Die zweite Finite-Elemente-Analyse besteht aus zwei Lastschritten bzw. Rechenschritten. Im ersten Lastschritt wird die äußere Belastung aufgebracht und gleichzeitig werden die Rissflanken mit den Punktlasten aus der ungerissenen Struktur beaufschlagt, um den Riss geschlossen zu halten. Im zweiten Lastschritt werden die Punktlasten quasistatisch reduziert. Mit diesem Vorgehen lässt sich der Zusammenhang zwischen Knotenkräften und -verschiebungen während der Entlastung der Rissflanken bestimmen. Anschließend kann das Rissöffnungsintegral mit den Gleichungen (6.1) ausgewertet werden. Da dieses Vorgehen rechenzeitintensiv ist, sollte im Vorfeld zu umfangreichen Untersuchungen abgeklärt werden, ob der Entlastungsvorgang linearisiert werden kann. In diesem Fall können die Gleichungen (6.2) verwendet werden und

es ist lediglich die Analyse der ungerissenen und der gerissenen Struktur ohne Entlastungsvorgang nötig. Ist dies möglich, vereinfacht sich die Auswertung merklich und die Anzahl der nötigen Finite-Elemente-Simulationen reduziert sich signifikant. Dieser Umstand soll an einem Zahlenbeispiel veranschaulicht werden. Angenommen zur Auswertung der finiten Bruchmechanik sollen $n_a=20$ unterschiedliche Risslängen für $n_f=20$ unterschiedliche äußere Lasten untersucht werden. Um das Rissöffnungsintegral auszuwerten muss in einem ersten Schritt die ungerissene Struktur mit einem Rechenschritt analysiert werden. Aus der ungerissenen Analyse können die Knotenkräfte entlang der potentiellen Rissflanken bestimmt werden. Nachfolgend muss für jede Risslänge und für jede äußeren Last eine Analyse mit zwei Rechenschritten durchgeführt werden. Ohne Linearisierung müssen für das Rissöffnungsintegral demzufolge $1+2 \cdot n_f \cdot n_a=801$ Rechenschritte ausgeführt werden. Mit Linearisierung reduziert sich der Aufwand auf $1 + 1 \cdot 1 \cdot n_a=21$ Rechenschritte. Für eine linearisierte Betrachtung müssen die Knotenkräfte entlang der Rissflanken nicht quasistatisch entlastet werden. Stattdessen müssen lediglich die Knotenkräfte im ungerissenen und die Knotenverschiebungen im gerissenen Zustand betrachtet werden. Dies ist mit jeweils einem Rechenschritt möglich und es können alle Iterationsschritte der nichtlinearen Analyse zur Auswertung genutzt werden. Deshalb genügt es nur die größte äußere Last zu betrachten. Wegen dem großen Unterschied in nötigen Rechenschritten ist es im Vorfeld zu umfangreicheren, nichtlinearen Untersuchungen wichtig abzuklären, ob eine Linearisierung des Rissöffnungsintegrals möglich ist.

Um dies für die einschnittige Überlappungsklebung zu überprüfen, werden im Folgenden die Ergebnisse für das Rissöffnungsintegral für beide Vorgehensweisen verglichen. Um einen Überblick zu geben, werden verschiedene Struktursituationen, Materialien und Risstypen betrachtet. Um den Linearisierungsfehler zu quantifizieren, wird folgendes Fehlermaß für die inkrementellen Energiefreisetzungsraten verwendet:

$$Err_{\bar{\mathcal{G}}} = \left| \frac{\bar{\mathcal{G}}^{\text{Int}} - \bar{\mathcal{G}}^{\text{Mul}}}{\bar{\mathcal{G}}^{\text{Int}}} \right|. \quad (6.10)$$

In dieser Gleichung steht $\bar{\mathcal{G}}^{\text{Int}}$ für die Auswertung mittels Integration aus Gleichungen (6.1) und $\bar{\mathcal{G}}^{\text{Mul}}$ für die linearisierte multiplikative Auswertung aus Gleichungen (6.2). Die Ergebnisse für die inkrementellen Energiefreisetzungsraten aus der Integration können mit den Energiefreisetzungsraten berechnet aus den potentiellen Energien, Gleichung (2.107), überprüft werden. Hierbei gab es in allen betrachteten Fällen eine maximale Abweichung von weniger als 0,1%.

Das Ziel der nachfolgenden Untersuchungen ist es aufzuzeigen, dass nichtlinear elastische Strukturen existieren, in welchen der Einfluss der Nichtlinearität beim Entlastungsvorgang nicht vernachlässigt werden darf. In diesen Fällen ist keine Linearisierung des Rissöffnungsintegrals möglich. Mit diesem Ziel werden zunächst einschnittige Überlappungsklebungen mit linear elastischem Materialverhalten untersucht. Dies ermöglicht es, den alleinigen Einfluss der geometrischen Nichtlinearität getrennt zu erfassen. Um ein möglichst stark nichtlineares Verhalten zu generieren, werden hierzu Klebefügungen mit kurzen Überlappungslängen, dünnen Fügeteilen und dicken Klebschichten modelliert. Die Fügeteile bestehen aus Texipreg HS 160 RM. Als Klebstoff werden AV138, XNR6823 und Loctite330 verwendet, um den Einfluss unterschiedlicher Steifigkeiten in der Klebschicht zu untersuchen. Anschließend wird der Einfluss hyperelastischen Materialverhaltens geprüft. Dazu wird der Silikonwerkstoff DC993 mit Neo-Hooke Materialgesetz verwendet. Die Materialkennwerte sind im Anhang A in Tabelle A.1 hinterlegt.

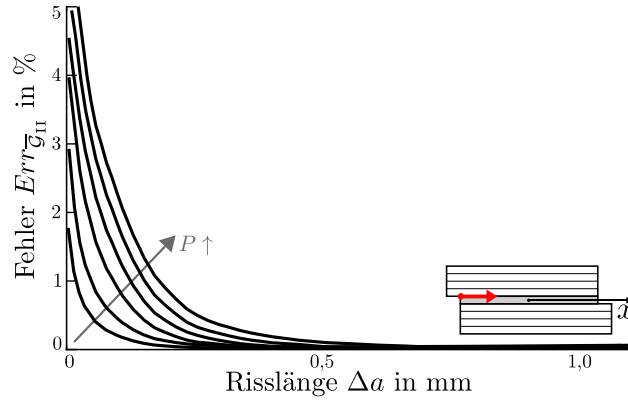


Abbildung 6.6: Linearisierungsfehler $Err_{G_{II}}$ für Modus II aufgetragen über der Risslänge mit der äußeren Last als Scharparameter für eine einschnittige Überlappungsklebung aus Neto et al. (2012) mit einer Überlappungslänge von $2c=10$ mm.

6.3.1 Einfluss geometrisch nichtlinearen Verhaltens

In Abbildung 6.6 ist der Modus II Linearisierungsfehler für einen Riss in der Klebschicht aufgetragen. Die betrachtete einschnittige Überlappungsklebung entspricht einer Konfiguration aus Neto et al. (2012) mit einer Überlappungslänge von $2c=10$ mm. Die FKV-Fügeteile bestehen jeweils aus 16 unidirektionalen Einzelschichten aus Texpreg HS 160 RM, als Klebstoff wird Araldite AV138 verwendet. Die überlappungsfreie Fügeteillänge beträgt $l_1=l_2=110$ mm, die Fügeteildicke $h_1=h_2=2,4$ mm und die Klebschichtdicke $t=0,2$ mm. Zu sehen ist, dass der Linearisierungsfehler mit kürzeren Risslängen und steigender äußerer Last zunimmt. Da die nichtlinearen Deformationen mit steigender äußerer Last zunehmen, ist zu erwarten, dass sich dies auch im Rissöffnungsintegral widerspiegelt. Für kürzere Risse sind die Verschiebungen der Rissflanken während der Rissöffnung kleiner als für längere Risse. Trotzdem ist der Linearisierungsfehler für kurze Risse größer. Durch das Verhalten für sehr kurze Risse mit nur wenigen beteiligten Knoten stellt sich die Frage, ob bei der Bestimmung der differentiellen Energiefreisetzungsrate ebenfalls ein Linearisierungsfehler auftritt. Für die differentielle Energiefreisetzungsrate wird nur ein koinzidentes Knotenpaar direkt an der hoch belasteten Risspitze quasistatisch entlastet. Der Linearisierungsfehler für die differentielle Energiefreisetzungsrate wird später in den Ergebnissen für nichtlineares Materialverhalten näher betrachtet.

In Abbildung 6.7 sind die Ergebnisse für eine Struktursituation mit sehr ausgeprägtem geometrisch nichtlinearem Verhalten aufgetragen. Mit dem Ziel die Nichtlinearität zu erhöhen wird die Fügeteilhöhe auf $h_1 = 1$ mm reduziert und die Klebschichtdicke auf $t = 10$ mm erhöht. Außerdem wird der Strukturklebstoff XNR6823 verwendet, da er eine geringere Steifigkeit besitzt als AV138. Für einen interlaminaren Riss vom gegenüberliegenden Rand ist der Linearisierungsfehler für Modus I in Abbildung 6.7a und der Linearisierungsfehler für Modus II in Abbildung 6.7b aufgetragen. Für Modus I steigt der Linearisierungsfehler wie zu erwarten mit zunehmender Risslänge und zunehmender äußerer Last an. Der Modus II Linearisierungsfehler steigt für kurze Risse mit der äußeren Last an, während er für lange Risse erst mit der äußeren Last ansteigt und bei weiterer Lasterhöhung mit der äußeren Last abfällt. Der Bereich kleiner Risslängen zeigt ein ähnliches Verhalten wie die in Abbildung 6.6 untersuchte Struktursituation. Das Verhalten für lange Risse, im speziellen der abnehmende Linearisierungsfehler mit steigender Last, kann an dieser Stelle nicht erklärt werden.

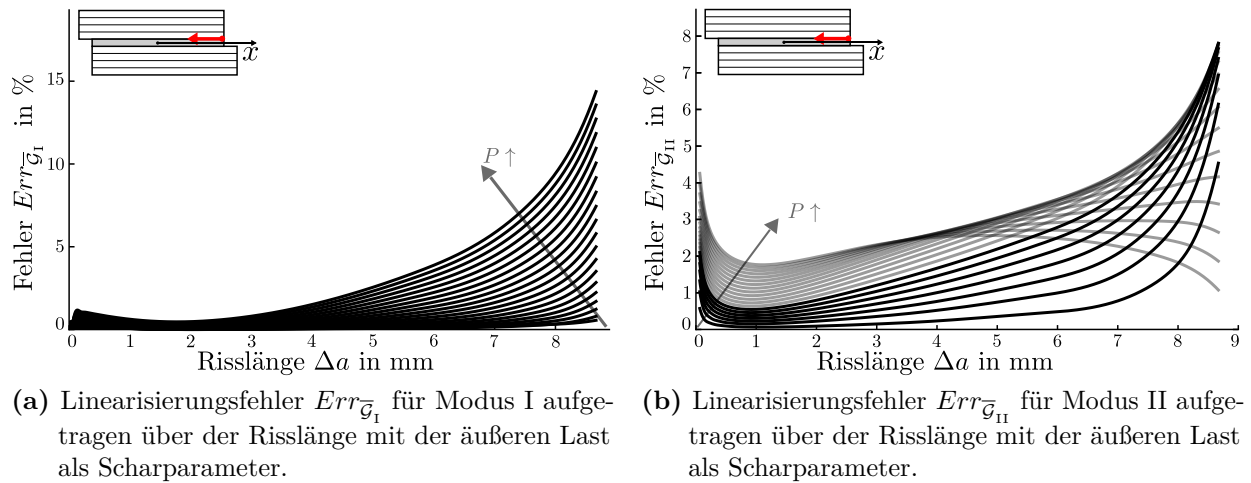


Abbildung 6.7: Konfiguration: Füge­teile aus Texipreg HS 160 RM mit Klebstoff XNR6823, $2c = 10$ mm, $t = 10$ mm, $l_1 = l_2 = 85$ mm, $h_1 = h_2 = 1$ mm

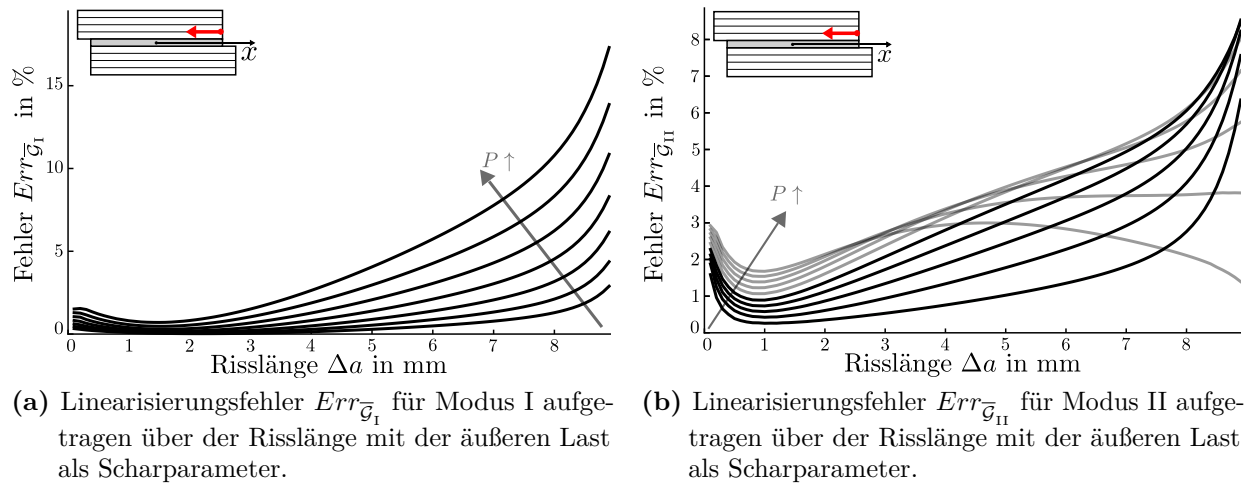


Abbildung 6.8: Konfiguration: Füge­teile aus Texipreg HS 160 RM mit Klebstoff Loctite330, $2c = 10$ mm, $t = 10$ mm, $l_1 = l_2 = 85$ mm, $h_1 = h_2 = 0.5$ mm

Um den Einfluss der geometrischen Nichtlinearität weiter zu erhöhen, wird die Füge­teildicke auf $h_1 = h_2 = 0.5$ mm halbiert und als Klebstoff wird Loctite330 mit einer nochmals geringeren Steifigkeit eingesetzt. Das Ziel ist, die Verschiebungen der Rissflanken während der Entlastung zu erhöhen und somit die nichtlinearen Einflüsse auf das Rissöffnungsintegral zu erhöhen. In Abbildungen 6.8a und 6.8b ist der Linearisierungsfehler für Modus I und II für einen interlaminaren Riss vom gegenüberliegenden Rand dargestellt. Die Verläufe zeigen ein sehr ähnliches Verhalten wie in der vorherigen Struktursituation.

6.3.2 Hyperelastisches nichtlineares Materialverhalten

Bisher wurde nur der Linearisierungsfehler für finite Risse in linear elastischen Materialien untersucht. Um den Grad der Nichtlinearität weiter zu erhöhen wird als Klebstoff das Silikon DC993 mit hyperelastischem Materialverhalten verwendet. Dieses Materialverhalten kann gut mit einem Neo-Hooke-Materialgesetz abgebildet werden. Im Fassadenbau werden

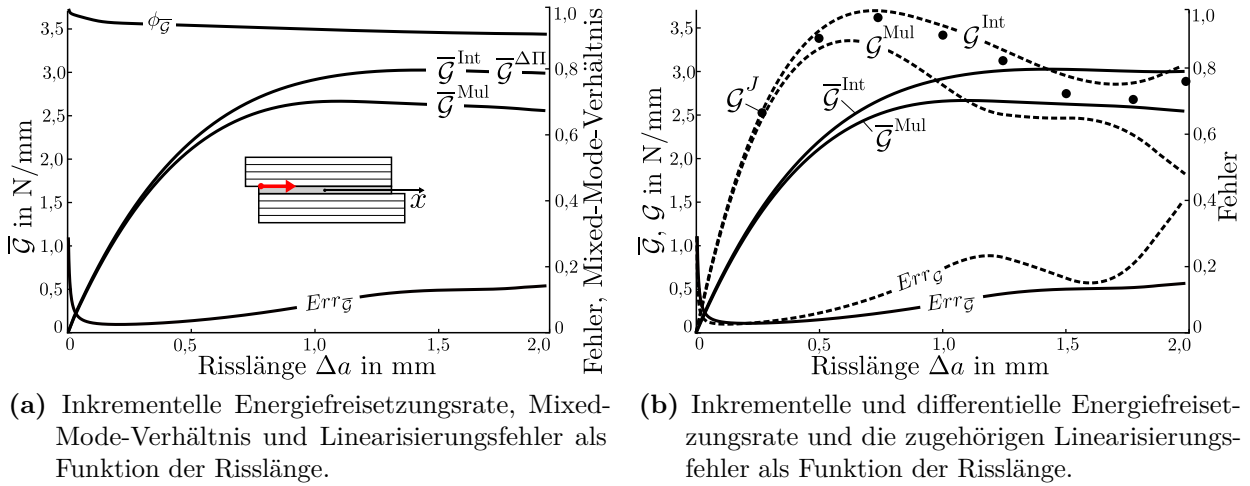


Abbildung 6.9: Konfiguration: Fügeteile aus Texipreg HS 160 RM mit Klebstoff DC993 mit äußerer Last in horizontaler Richtung, $2c = 30$ mm, $t = 1$ mm, $l_1 = l_2 = 100$ mm, $h_1 = h_2 = 2$ mm

Glasscheiben mit Silikon verklebt, wobei große Klebschichtdicken ein technisch relevantes Problem darstellen, Staudt et al. (2016). Dies zeigt sich auch im ETAG002 Prüfkörper der ETAG Richtlinie für Fassadenklebungen. Speziell im Fall von dicken Klebschichten aus Silikon zeigt sich der Einfluss der Integration in einem lokalen, mitbewegten Koordinatensystem sehr deutlich. Zunächst wird aber der Einfluss der Integration auf die Energiefreisetzungsraten in einem ortsfesten Koordinatensystem betrachtet.

Zuerst wird eine einschnittige Silikonklebung mit einer Klebschichtdicke von $t=1$ mm betrachtet. In Abbildung 6.9a wird die mittels Integration berechnete inkrementelle Energiefreisetzungsraten \bar{G}^{Int} mit der linearisierten inkrementellen Energiefreisetzungsraten \bar{G}^{Mul} für einen Riss in der Klebschicht verglichen. Zur Validierung der Ergebnisse wurden die Energiefreisetzungsraten nochmals über potentielle Energien nach Gleichung (2.107) berechnet und als $\bar{G}^{\Delta\Pi}$ aufgetragen. Hier kann eine sehr gute Übereinstimmung mit den aus der Integration berechneten Werten festgestellt werden. Das ebenfalls aufgetragene Mixed-Mode-Verhältnis $\phi_{\bar{G}}$ zeigt, dass die Energiefreisetzungsraten der Silikonklebung unter horizontaler Lasteinleitung hauptsächlich aus Modus II Beiträgen besteht. Da der Linearisierungsfehler $\text{Err}_{\bar{G}}$ 18% für lange Risse und bis zu 30% für kurze Risse beträgt, zeigt sich deutlich, dass die Linearisierung für stark nichtlineares Verhalten keine Gültigkeit besitzt. In Abbildung 6.9b ist zusätzlich der Einfluss der Linearisierung auf die differentielle Energiefreisetzungsraten aufgetragen. Sowohl die linearisierte differentielle Energiefreisetzungsraten \bar{G}^{Mul} als auch die nicht linearisierte differentielle Energiefreisetzungsraten \bar{G}^{Int} werden mit Gleichung (2.109) aus dem entsprechenden inkrementellen Energiefreisetzungsraten abgeleitet. Darüber hinaus ist die aus dem J-Integral berechnete differentielle Energiefreisetzungsraten \bar{G}^J zur Validierung der Ergebnisse aufgetragen. Hier zeigt sich für lange Risse eine maximale Abweichung von 6% im Vergleich zur über Integration berechneten differentiellen Energiefreisetzungsraten. Weiterhin sind die Linearisierungsfehler $\text{Err}_{\bar{G}}$ und $\text{Err}_{\bar{G}}$ aufgetragen. Die Ergebnisse zeigen, dass die differentielle Energiefreisetzungsraten sensibler auf nichtlineare Einflüsse reagiert als die inkrementelle Energiefreisetzungsraten. Wie in Abbildung 6.9b zu sehen ist, ist der Linearisierungsfehler für die differentielle Energiefreisetzungsraten besonders groß in Bereichen großer Risslängen in denen die Steigungen von \bar{G}^{Mul} und \bar{G}^{Int} stark voneinander abweichen. Der Grund hierfür wird leicht anhand des zweiten Terms in Gleichung (2.109) ersichtlich.

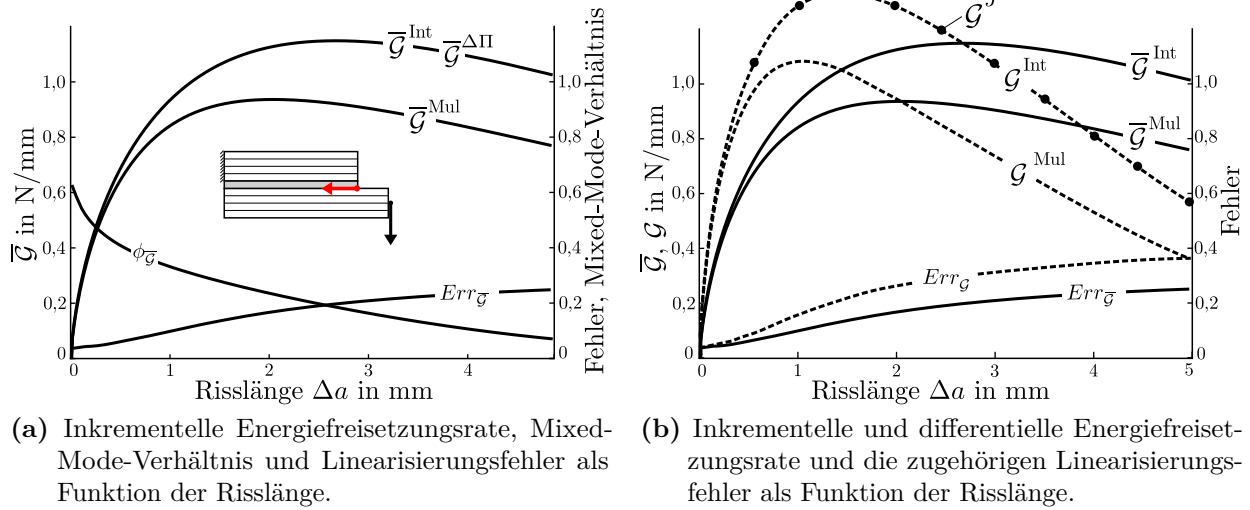


Abbildung 6.10: Konfiguration: Fügebauteile aus Texpreg HS 160 RM mit Klebstoff DC993 mit äußerer Last in vertikaler Richtung, $2c = 10$ mm, $t = 10$ mm, $l_1 = l_2 = 10$ mm, $h_1 = h_2 = 3$ mm

Berechnungen für größere Risslängen waren aufgrund von Konvergenzproblemen während der Finte-Elemente-Routine nicht möglich. Die Konvergenzprobleme resultieren daraus, dass die Klebschicht unter einer horizontalen Last stark unter Schub belastet ist und deshalb während der Rissöffnung große Verdrehungen und stark deformierte Elemente auftreten.

Im folgenden wird die eine Silikonklebung in vertikaler Richtung belastet, um den Anteil der Modus II Rissöffnung zu verringern. In Abbildung 6.10 sind die Ergebnisse für diesen Lastfall aufgetragen. In Abbildung 6.10a werden wieder die inkrementellen Energiefreisetzungsraten und der zugehörige Linearisierungsfehler betrachtet. Hier zeigt sich ein Linearisierungsfehler $Err_{\bar{G}}$ von bis zu 25% für lange Risse. Im Gegensatz zum vorherigen Lastfall mit höherem Modus II Anteil nimmt der Linearisierungsfehler für kurze Risse ab. In Abbildung 6.10b zeigt sich, dass zwischen der differentiellen Energiefreisetzungsraten berechnet mittels Integration bzw. aus dem J-Integral eine sehr gute Übereinstimmung vorliegt. Auch hier reagiert die differentielle Energiefreisetzungsraten wieder sensibler auf nichtlineare Einflüsse.

Einflüsse eines mitbewegten lokalen Koordinatensystems

Bisher wurde gezeigt, dass die Linearisierung der Gleichungen für das Rissöffnungsintegral einen großen Fehler in den Energiefreisetzungsraten erzeugen kann. Deshalb sollte für stark nichtlineares Verhalten immer die Integration ausgeführt werden. Im Folgenden soll der Einfluss der Integration in einem lokalen mit dem Knoten mitbewegten Koordinatensystem untersucht werden. Da dieses Vorgehen während der gesamten Rissöffnung die Anteile normal und tangential zu den Rissflanken trennt, ist im Vergleich zu einem stationären Koordinatensystem ein großer Einfluss auf das Mixed-Mode-Verhältnis zu erwarten, falls die Rissflanken während der Entlastung große Deformationen durchlaufen. In Abbildung 6.11 ist die Energiefreisetzungsraten nach Rissöffnungsmoden getrennt aufgetragen. Für beide Moden ist die inkrementelle Energiefreisetzungsraten aufgetragen in linearisierter Form $(\cdot)^{Mul}$, ausgewertet mittels Integration in einem stationärem Koordinatensystem $(\cdot)^{Int}$ und ausgewertet mittels Integration in einem lokalem mitbewegtem Koordinatensystem $(\cdot)^{Loc}$. Zu sehen ist, dass durch die Linearisierung der Absolutwert der Energiefreisetzungsraten und auch das

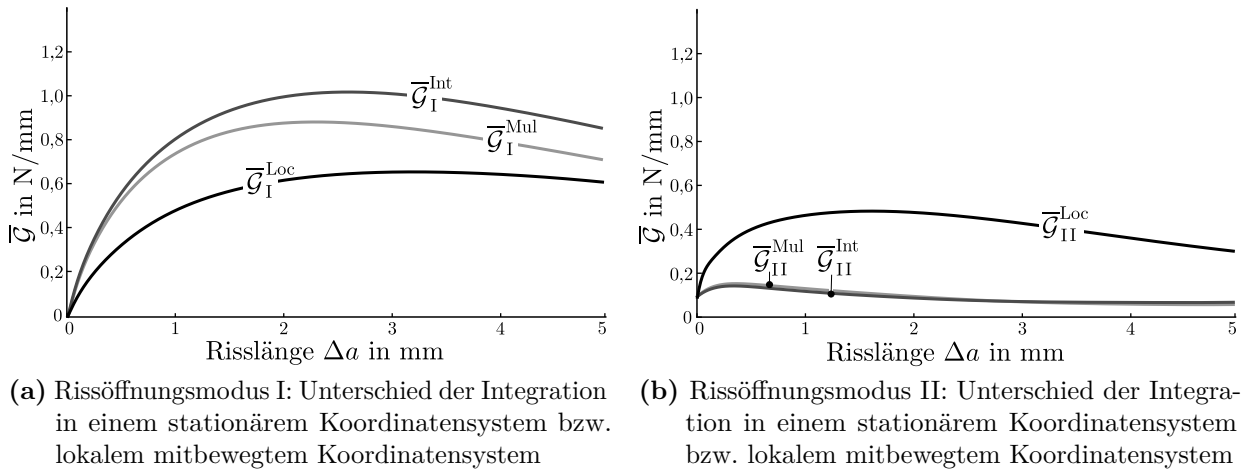


Abbildung 6.11: Konfiguration: Füge­teile aus Texipreg HS 160 RM mit Klebstoff DC993 mit äußerer Last in vertikaler Richtung, $2c = 10$ mm, $t = 10$ mm, $l_1 = l_2 = 10$ mm, $h_1 = h_2 = 3$ mm

Mixed-Mode-Verhältnis falsch wiedergegeben wird. In diesem Beispiel ist der Absolutwert der linearisierten Betrachtung zu klein wie auch schon in der vorherigen Betrachtung, in Abbildung 6.10a, zu sehen war. Außerdem wird der Beitrag der Modus I Rissöffnung durch die Linearisierung unterschätzt. Die Auswertung in lokalen mitbewegten Koordinaten liefert den geringsten Beitrag der Modus I Rissöffnung im Vergleich zu den stationären Koordinaten oder der linearisierten Auswertung. Der Anteil, um welchen der Modus I Anteil der Energiefreisetzungsrate in lokalen Koordinaten reduziert, ist wird durch das Mitbewegen des Koordinatensystems in einen Modus II Anteil überführt. Wird ein lokales Koordinatensystem verwendet, wird also Energie zwischen den einzelnen Moden transferiert, wie es zu Beginn dieses Kapitels in Abbildung 6.3 thematisiert wurde. Die Integration in lokalen Koordinaten führt dazu, dass die einzelnen Beiträge während der Rissöffnung streng in Beiträge normal und tangential zu den Rissflanken aufgespalten werden.

6.3.3 Effektive Bruchzähigkeit für eine gemischte Beanspruchung

Liegen die inkrementellen Energiefreisetzungsrate als Funktion der Risslänge nach Rissöffnungsmoden getrennt vor, können die Formulierungen für das Mixed-Mode-Verhältnis aus Gleichungen (6.3)-(6.7) verglichen werden. Dabei sind die spannungsbasierten Formulierungen von besonderem Interesse, da diese einfach und schnell auszuwerten sind. Falls eine gute Übereinstimmung mit den energiebasierten Methoden vorliegt, wäre es auf diesem Weg möglich das Mixed-Mode-Verhältnis ohne die rechenzeitintensive Auswertung des Rissöffnungsintegrals zu bestimmen. Weiterhin ist zur Beurteilung von Rissinitiiierung im Rahmen der finiten Bruchmechanik von Interesse, wie sich die effektive Bruchzähigkeit als Funktion des Mixed-Mode-Verhältnis, Gleichungen (6.8) und (6.9), entwickelt.

In Abbildung 6.12 sind die Formulierungen für das Mixed-Mode-Verhältnis aus den Gleichungen (6.3)-(6.7) aufgetragen. In Abbildung 6.12a sind die Ergebnisse für einen Riss in der Klebschicht gezeigt und in Abbildung 6.12b die Ergebnisse für einen interlaminaren Riss vom gegenüberliegenden Rand im Laminat. In beiden Fällen liegen die Werte von $\phi_{\bar{G}}$ und $\bar{\phi}_{\bar{G}}$ übereinander. Der Unterschied ergibt sich erst in der weiteren Behandlung der beiden Größen. $\phi_{\bar{G}}$ steht für eine punktweise Auswertung eines Zwischenzustandes mit Risslänge a wohingegen

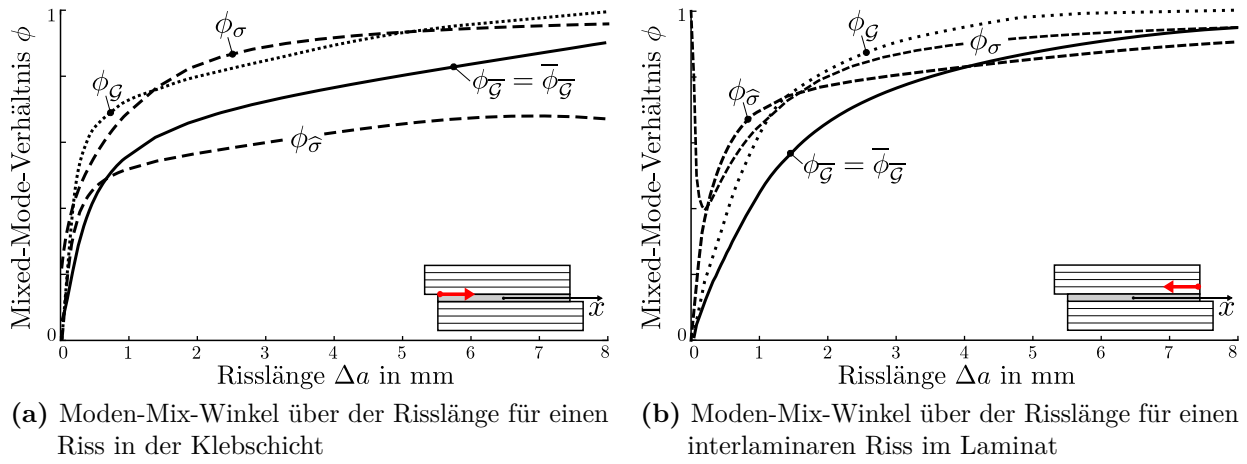


Abbildung 6.12: Konfiguration: einschnittige Überlappungsklebung aus Ribeiro et al. (2016) mit $2c = 10$ mm, $t = 0.2$ mm, $l_1 = l_2 = 85$ mm, $h_1 = h_2 = 3$ mm.

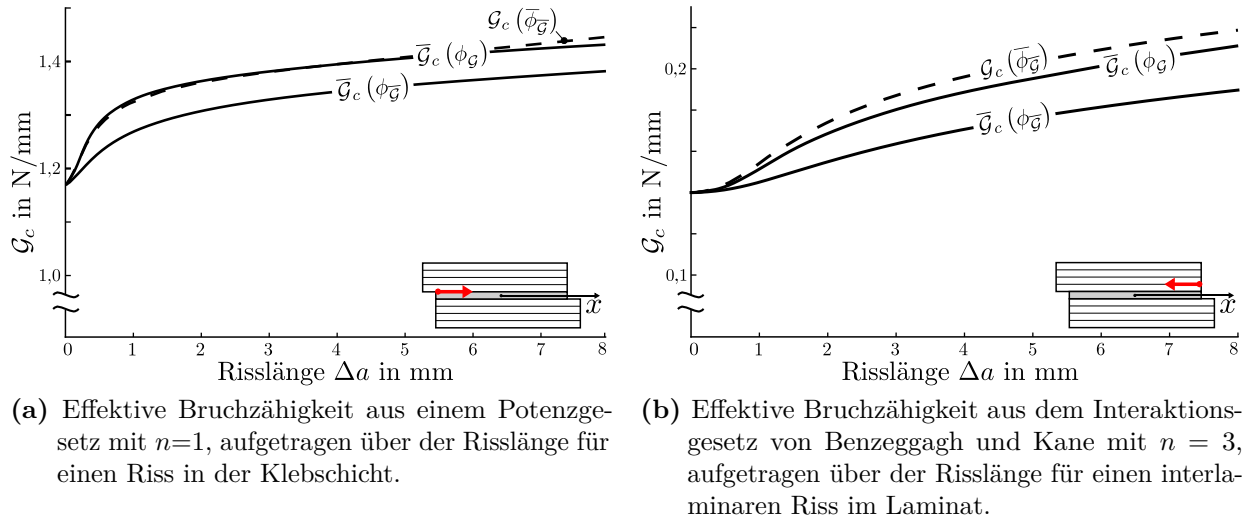


Abbildung 6.13: Konfiguration: einschnittige Überlappungsklebung aus Ribeiro et al. (2016) mit $2c = 10$ mm, $t = 0.2$ mm, $l_1 = l_2 = 85$ mm, $h_1 = h_2 = 3$ mm.

$\bar{\phi}_{\bar{g}}$ die entsprechende Größe für den neu entstandenen finiten Riss der Länge Δa darstellt. Für die untersuchten Fälle ist keine gute Übereinstimmung einer der spannungsbasierten Formulierungen mit einer der energiebasierten Formulierungen vorhanden. Der Verlauf von ϕ_{σ} zeigt für kurze interlaminare Risse, in Abbildung 6.12b, eine sehr große Abweichung von allen andern Formulierungen, während für den Riss in der Klebschicht eine gute Übereinstimmung mit $\phi_{\bar{g}}$ vorliegt. Für $\phi_{\hat{\sigma}}$ liegt in keinem der beiden Fälle eine gute Übereinstimmung vor. Wegen der großen Abweichungen der spannungsbasierten Formulierungen werden im Folgenden lediglich die Auswirkungen der energiebasierten Formulierungen auf die effektive Bruchzähigkeit untersucht. Da das Mixed-Mode-Verhältnis über der Risslänge bekannt ist, wird die effektive Bruchzähigkeit ebenfalls über der Risslänge aufgetragen werden.

Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.13 dargestellt. In Abbildung 6.13a sind die Ergebnisse für einen Riss in der Klebschicht mit dem Potenzgesetz, Gleichung 2.98, dargestellt und in Abbildung 6.13b die Ergebnisse für einen interlaminaren Riss unter Anwendung des Interaktionsgesetzes von Benzeggagh und Kane, Gleichung 2.99. In beiden Fällen zeigen

die Formulierungen $\mathcal{G}_c(\bar{\phi}_{\bar{G}})$ und $\bar{\mathcal{G}}_c(\phi_G)$ eine gute Übereinstimmung, während die dritte Formulierung mit $\bar{\mathcal{G}}_c(\phi_{\bar{G}})$ abweicht und zu kleineren Bruchzähigkeiten führt. Der Grund dafür liegt darin, dass in der dritten Formulierung die Mittelung zweimal ausgeführt wird, während in den anderen beiden Formulierungen jeweils nur einmal gemittelt wird. Für $\mathcal{G}_c(\bar{\phi}_{\bar{G}})$ wird auf Ebene der inkrementellen Energiefreisetzungsraten gemittelt und für $\bar{\mathcal{G}}_c(\phi_G)$ auf Ebene der Energiefreisetzungsraten. Für $\bar{\mathcal{G}}_c(\phi_{\bar{G}})$ wird zuerst auf Ebene der inkrementellen Energiefreisetzungsraten gemittelt und zusätzlich auf Ebene der Energiefreisetzungsraten.

Die Formulierung, die am besten mit dem Energiekriterium (2.121) harmoniert, ist die punktweise Formulierung mit differentiellen Energiefreisetzungsraten $\bar{\mathcal{G}}_c(\phi_G)$, da in diesem Fall auf beiden Seiten der Gleichung nur Größen in Abhängigkeit der differentiellen Energiefreisetzungsraten stehen und somit auf beiden Seiten alle gerissenen Zwischenzustände mit berücksichtigt werden. Um dies zu veranschaulichen, kann das Energiekriterium beispielsweise unter Verwendung der Interaktionsbeziehung von Benzeggagh und Kane wie folgt geschrieben werden:

$$\int_0^{\Delta a} (\mathcal{G}_I(\tilde{a}) + \mathcal{G}_{II}(\tilde{a})) d\tilde{a} = \int_0^{\Delta a} \left(\mathcal{G}_{Ic} + (\mathcal{G}_{IIc} - \mathcal{G}_{Ic}) \left(\frac{\mathcal{G}_{II}(\tilde{a})}{\mathcal{G}_I(\tilde{a}) + \mathcal{G}_{II}(\tilde{a})} \right)^n \right) d\tilde{a}, \quad (6.11)$$

$$\bar{\mathcal{G}}(\Delta a) = \bar{\mathcal{G}}_c(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \Delta a). \quad (6.12)$$

Die differentiellen Energiefreisetzungsraten lassen sich mit Gleichung (2.109) aus den inkrementellen Energiefreisetzungsraten berechnen oder können direkt mit den Rissöffnungsintegral bestimmt werden. In jedem Fall müssen die gerissenen Zwischenzustände einzeln berechnet werden, was im Fall der nichtlinearen Elastizität zu einem erheblichen Mehraufwand führen kann. Mit geringerem Aufwand kann die Formulierung $\mathcal{G}_c(\bar{\phi}_{\bar{G}})$ mit einem über den finiten Riss gemittelten Mixed-Mode-Verhältnis verwendet werden. Damit ergibt sich unter Verwendung der Interaktionsbeziehung von Benzeggagh und Kane folgender Zusammenhang:

$$\bar{\mathcal{G}}(\Delta a) = \mathcal{G}_{Ic} + (\mathcal{G}_{IIc} - \mathcal{G}_{Ic}) \left(\frac{\bar{\mathcal{G}}_{II}(\Delta a)}{\bar{\mathcal{G}}_I(\Delta a) + \bar{\mathcal{G}}_{II}(\Delta a)} \right)^n, \quad (6.13)$$

$$\bar{\mathcal{G}}(\Delta a) = \mathcal{G}_c(\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \bar{\phi}(\Delta a)). \quad (6.14)$$

Diese Formulierung mit inkrementellen Energiefreisetzungsraten für den finiten Riss kann sinnvoll eingesetzt werden, falls nur eine begrenzte Anzahl an Risslängen zur Bewertung einer Struktursituation nötig ist. Dies ist beispielsweise der Fall wenn das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium iterativ gelöst werden soll, Hebel (2010). Außerdem ist diese Formulierung bei einem Riss mit zwei Risspitzen im Inneren einer Struktur anwendbar, während eine Anwendung der Formulierung mit differentiellen Energiefreisetzungsraten hier fragwürdig ist.

6.3.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass die Anwendung des Rissöffnungsintegrals im Rahmen der nichtlinearen Elastizität zusätzliche Rechenschritte benötigt. Falls während der Entlastung der Rissflanken ein nichtlinearer Zusammenhang der Knotenkräfte mit den Knotenverschiebungen auftritt, kann der Linearisierungsfehler je nach Struktursituation stark anwachsen und die freigesetzte Energie muss mittels Integration bestimmt werden. Weiterhin kann es nötig sein, die Integration in einem lokalem mitbewegtem Koordinatensystem auszuführen. Dies ist der

Fall, falls die einzelnen Beiträge zur Energiefreisetzungsrate während der Rissöffnung streng in einen Anteil normal und tangential zur Rissflanke aufgespalten werden sollen. Des weiteren wurde gezeigt, dass der Einfluss der Nichtlinearität einen ebenfalls nicht zu vernachlässigenden Linearisierungsfehler bei der Berechnung der differentiellen Energiefreisetzungsrate erzeugen kann, im besonderen für lange Risse.

Das Rissöffnungsintegral wird hauptsächlich dazu genutzt, das Mixed-Mode-Verhältnis zu bestimmen. Wegen des immensen numerischen Aufwands, der mit der Auswertung des Rissöffnungsintegrals verbunden ist, wurden zusätzlich spannungsbasierte Formulierungen für das Mixed-Mode-Verhältnis mit den energiebasierten Formulierungen verglichen. Unglücklicherweise liegt in keinem der untersuchten Fälle eine gute Übereinstimmung vor, weshalb davon abgeraten wird, die spannungsbasierten Formulierungen für die einschnittige Überlappungsklebung anzuwenden. Die energiebasierten Formulierungen mit differentieller und inkrementeller Energiefreisetzungsrate zeigen eine gute Übereinstimmung. Eine weitere Anwendung für das Rissöffnungsintegral ist, beim Auftreten von Rissmustern die freigesetzte Energie den beteiligten Einzelrissen zuzuteilen. Dieser Anwendungsfall des Rissöffnungsintegrals findet sich im nächsten Kapitel 7.

Für Risse mit einer Rissspitze wird die Formulierung mit differentiellen Energiefreisetzungsraten empfohlen, da hierdurch auf beiden Seiten im Energiekriterium Größen verwendet werden, die die gerissenen Zwischenzustände berücksichtigen. Bei der Anwendung eines iterativen Lösungsansatzes oder im Falle eines Risses mit zwei Rissspitzen im Inneren einer Struktur zeigt sich Formulierung mit Hilfe der inkrementellen Energiefreisetzungsraten vorteilhaft.

Kapitel 7

Finite-Elemente-Modellierung interlaminarer Rissentstehung

In diesem Kapitel wird das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium mithilfe der Finite-Elemente-Methode ausgewertet mit dem Ziel interlaminares Fügeteilversagen für einschnittigen Überlappungsklebung zu bewerten. Im Fokus dabei liegt ein Vergleich der punkweisen mit der gemittelten Auswertung des Spannungskriteriums für nicht-monotone Spannungsfelder, wie sie typischerweise in den interlaminaren Grenzschichten der FKV-Fügeteile im Überlappungsbereich vorkommen. Für die in diesen Fällen möglichen Rissmuster werden die inkrementellen Energiefreisetzungsraten untersucht und ein geeignetes Energiekriterium formuliert.

7.1 Bewertung nicht-monotoner Spannungsfelder

Im Überlappungsbereich der einschnittigen Überlappungsklebung Verlaufen die Spannungen nicht-monoton, wie in Kapitel 4.2 in Abbildung 4.6 gezeigt. Dies führt bei Bewertung des Spannungszustandes mit einem geeigneten Spannungskriterium zu mehreren überlasteten Bereichen. Liegt mehr als ein überlasteter Bereich vor können theoretisch Rissmuster entstehen und es stellt sich die Frage wie diese mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium bewertet werden können. Im Folgenden soll im Besonderen der Unterschied zwischen einer punkweisen und einer gemittelten Auswertung des Spannungskriteriums für diesen Anwendungsfall diskutiert werden. Da die Ergebnisse schlussendlich mit einer Kohäsivzonenmodellierung verglichen werden sollen wird im Folgenden ein Potenzgesetz als Spannungskriterium gewählt:

$$F = \left(\frac{\langle \sigma_n \rangle}{\sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{ns}}{\tau_c} \right)^2.$$

Dieses kann punkweise F_{PM} , über die potentielle Rissfläche gemittelt F_{LM} oder sequentiell F_{PMLM} ausgeführt werden, wobei der punkweisen Auswertung eine gemittelte Auswertung nachfolgt. Falls durch ein nicht-monotones Spannungsfeld mehr als ein überlasteter Bereich auftritt sind potentiell Rissmuster möglich. In diesen Fall muss eine Formulierung für die effektive Bruchzähigkeit \mathcal{G}_c gefunden werden die Rissmuster beschreiben kann. Das Energiekriterium behält weiterhin die folgende Form:

$$G = \frac{\bar{\mathcal{G}}}{\mathcal{G}_c}.$$

In den Voruntersuchungen in Abbildung 4.6b zeigen sich an den beiden Enden des Überlappungsbereichs $x=\pm c$ stark nicht-monotone interlaminare Spannungsverläufe. Wird dort ein Spannungskriterium F_{PM} punkweise ausgewertet können mehrere überlastete Bereiche auftreten, siehe Abbildung 7.1. In diesen Bereich ist nach der Logik des gekoppelten Spannungs-

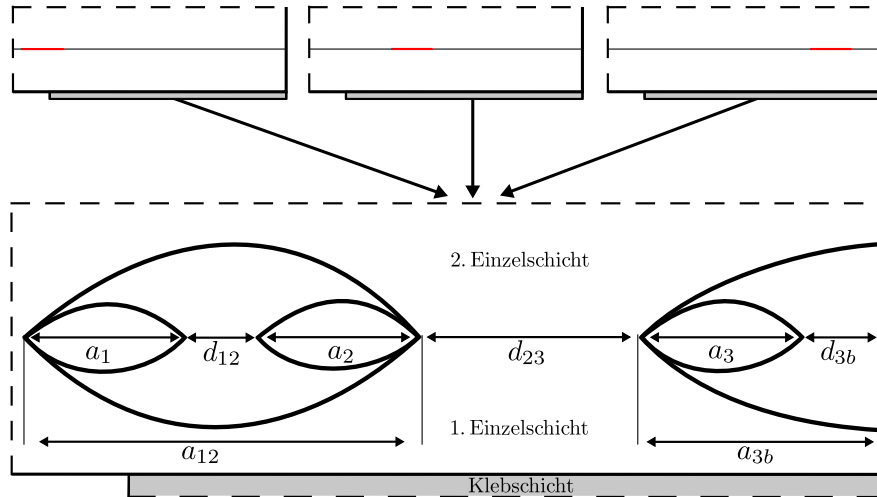


Abbildung 7.1: Interlaminare Risse die aufgrund der nicht-monotonen Spannungsverläufe mit einer punktwweisen oder gemittelten Auswertung des Spannungskriterium einzeln oder als Rissmuster möglich sind.

und Energiekriteriums Rissentstehung möglich. Bei mehreren überlasteten Bereich können theoretisch Rissmuster, gleichzeitiges initiieren von mehr als einem Riss, entstehen.

In Abbildung 7.1 können durch Anwendung von F_{PM} beispielsweise die drei Risse a_1 , a_2 und a_3 als Einzelrisse oder kombiniert als Rissmuster modelliert werden. Die Risse a_{12} und a_{3b} können nur mithilfe einer gemittelten Auswertung des Spannungskriteriums F_{LM} modelliert werden. Durch eine gemittelte Auswertung des Spannungskriteriums erhöht sich somit die Anzahl an potentieller Risskonfigurationen. Dies ist auch der Nachteil einer gemittelten Auswertung, insbesondere wenn weder Anfangs- noch Endpunkt der Mittelung festliegen. Um die Vorteile der punktwweisen und gemittelten Auswertung nutzen zu können wird in dieser Arbeit eine sequentielle Auswertung F_{PMLM} vorgeschlagen. Hierbei werden in einem ersten Schritt überlastete Bereiche mit F_{PM} identifiziert, in diesem Beispiel a_1 , a_2 und a_3 . Nachfolgend wird durch eine gemittelte Auswertung mit F_{LM} geprüft ob überlastete Bereiche vereint oder bis zur Berandung ausgedehnt werden können. In diesem Beispiel können somit a_1 und a_2 zu a_{12} vereint werden und $a_3 \rightarrow a_{3b}$ bis zum Rand ausgedehnt werden. F_{PMLM} ist im Vergleich zu F_{LM} besonders Effizient in der Anwendung, da die Anfangs- und Endpunkte für die Mittelung aus der punktwweisen Auswertung bekannt sind. Die Vereinigung von Rissen bzw. die Ausdehnung eines Risses bis zum Rand erhöht die freigesetzte Energie und wirkt sich demzufolge auch auf die inkrementelle Energiefreisetzungsrates aus. Dieser Einfluss wird in den Abschnitten 7.2.1 und 7.2.2 näher untersucht. An dieser Stelle sei trotzdem angemerkt, dass der Riss a_{3b} ein von Ribeiro et al. (2016) experimentell nachgewiesener Versagensmodus ist während eine Modellierung von a_3 zu unphysikalisch hohen Versagenslasten führt.

Energetische Bewertung von Rissmustern

Falls mehrere überlastete Bereiche auftreten und eine Vereinigung nicht möglich ist, stellen sich weitere Fragen bezüglich der energetischen Bewertung. Einerseits können alle potentiellen Risse a_i in Konkurrenz zueinander stehen. Versagen tritt in diesem Fall ein, wenn der kritischste Riss das Energiekriterium erfüllt und somit als Einzelriss initiiert. Andererseits können die Risse auch gemeinsam als Rissmuster initiieren wobei sie in diesem Fall auch gemeinsam mit

einem geeigneten Energiekriterium bewertet werden müssen. Versagen tritt in diesem Fall ein wenn das Rissmuster das Energiekriterium erfüllt. Im Fall der konkurrierenden Einzelrisse muss für jeden Riss die inkrementelle Energiefreisetzungsrate $\bar{\mathcal{G}}_i = \Delta\Pi_i / \Delta a_i$ bestimmt werden. Mit dem Energiekriterium, Gleichung (2.116), wird darauf folgend derjenige Riss bestimmt welcher initiiert und somit die Versagenslast bestimmt. Die Bewertung eines Rissmusters ist nicht so eindeutig. Hier kann ebenfalls eine inkrementelle Energiefreisetzungsrate bestimmt werden indem die freigesetzte Energie durch die Summe aller Risslängen geteilt wird:

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{\sum \Delta\Pi_i}{\sum \Delta a_i}. \quad (7.1)$$

Die energetische Bewertung erfolgt anschließend wieder mit Gleichung (2.116). Durch diese Bewertung werden die Risslängen aller beteiligten Risse addiert und ein $\bar{\mathcal{G}}$ für das gesamte Rissmuster berechnet, das zwischen den $\bar{\mathcal{G}}_i$ der Einzelrisse liegt. Eine Ausnahme davon bilden Risse die so nahe beieinander liegen, dass sie miteinander interagieren und deshalb als Rissmuster mehr Energie freisetzen, als die Summe der Einzelrisse ohne Interaktion. Sind die potentiellen Risse für ein Rissmuster soweit voneinander entfernt, dass keine Interaktion über die freigesetzte Energie stattfindet, kann dennoch ein Interaktionskriterium formuliert werden. Angelehnt an die Interaktionsbeziehungen in Spannungsriterien kann die folgende Formulierung für die effektive Bruchzähigkeit $\mathcal{G}_c^{\text{INT}}$ hergeleitet werden kann:

$$\left(\frac{\bar{\mathcal{G}}}{\mathcal{G}_c^{\text{INT}}} \right)^m = \sum \left(\frac{\frac{\Delta\Pi_i}{\Delta a_i}}{\mathcal{G}_{c,i}(\phi_i)} \right)^m = 1, \quad (7.2)$$

$$\mathcal{G}_c^{\text{INT}} = \frac{\sum \Delta\Pi_i}{\left(\sum \left(\frac{\frac{\Delta\Pi_i}{\Delta a_i}}{\mathcal{G}_{c,i}(\phi_i)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}}. \quad (7.3)$$

Für den Sonderfall $m = i = 2$ mit zwei Rissen ohne Berücksichtigung des Moden-Mix $\mathcal{G}_{c,i}(\phi_i) = \mathcal{G}_c$ vereinfacht sich Gleichung (7.3) zu:

$$\mathcal{G}_c^{\text{INT}} = \frac{\mathcal{G}_c \frac{\Delta\Pi_1 + \Delta\Pi_2}{\Delta a_1 + \Delta a_2}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\Pi_1}{\Delta a_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\Pi_2}{\Delta a_2} \right)^2}}. \quad (7.4)$$

Das Interaktionsgesetz liefert im Fall der Rissmuster eine verminderte Bruchzähigkeit $\mathcal{G}_c^{\text{INT}} < \mathcal{G}_c$. Im Fall eines Einzelrisses oder $m \rightarrow \infty$ reduziert sich Gleichung (7.3) zu $\mathcal{G}_c^{\text{INT}} = \mathcal{G}_c$. Die während der Auswertung benötigten Größen $\Delta\Pi_i$ und ϕ_i können mit den Rissöffnungsintegral berechnet werden. Die Bruchzähigkeiten $\mathcal{G}_{c,i}(\phi_i)$ werden wie in den Kapiteln zuvor mit der Formulierung von Benzeggagh und Kane (BK) mit Interaktionsexponent $n=3$ bestimmt, Gleichung (2.99).

Im Folgenden wird ein Vorgehen zur Bewertung von Struktursituationen mit mehreren überlasteten Bereichen vorgeschlagen. In Abbildung 7.2 ist das Vorgehen in einem Flussdiagramm zusammengefasst. Zuerst wird die ungerissene Struktur mit einem punktwise ausgewerteten Spannungsriterium bewertet. Falls nur ein überlasteter Bereich identifiziert wird, kann das Energiekriterium für einen Riss ausgewertet werden, der den gesamten überlasteten Bereich überspannt. Liegen mehrere überlastete Bereiche vor wird durch eine gemittelte Auswertung des Spannungsriteriums überprüft ob die einzelnen Bereiche vereint oder zur Berandung hin ausgedehnt werden können. Falls nach der gemittelten Auswertung alle Bereiche vereint werden konnten, genügt es wieder nur einen Riss energetisch zu bewerten.

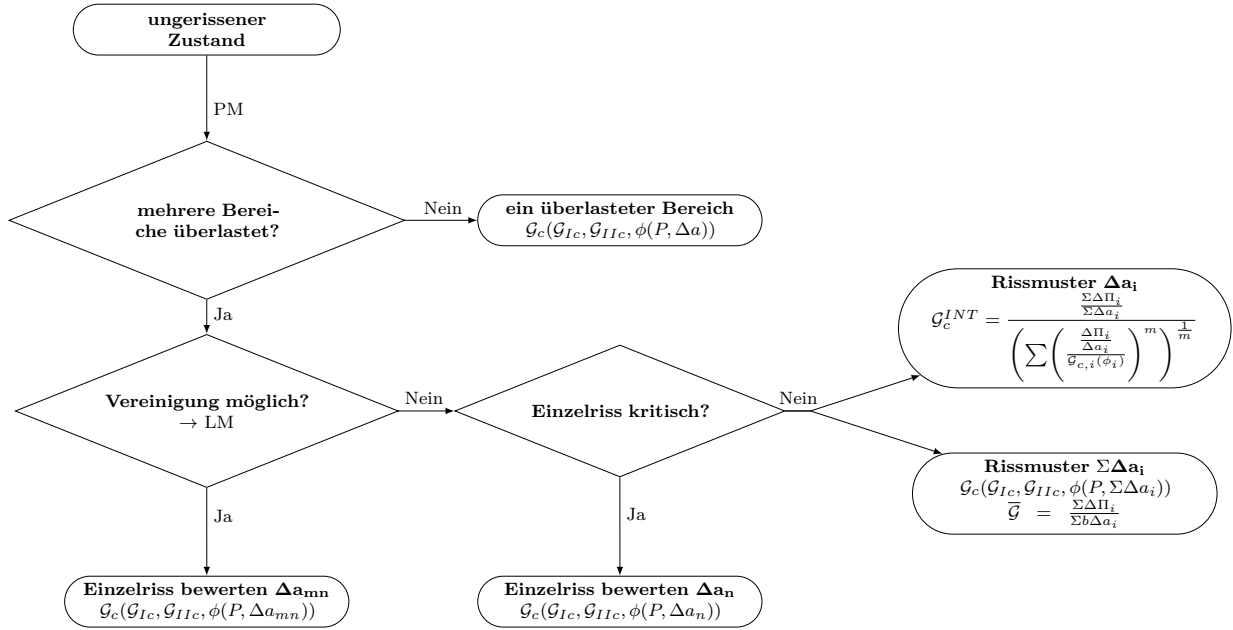


Abbildung 7.2: Flussdiagramm zur sequentiellen Auswertung des Spannungskriteriums.

Liegen immer noch mehrere überlastete Bereiche vor muss die inkrementelle Energiefreisetzungsrate $\bar{\mathcal{G}}_i = \Delta \Pi_i / \Delta a_i$ für jeden Riss Δa_i einzeln ausgewertet werden. Ist ein Riss bei der energetischen Betrachtung deutlich kritischer, genügt es diesen Einzelriss zu bewerten. Ist die Risskonfiguration aus Experimenten bekannt genügt es ebenfalls nur diese Konfiguration zu untersuchen. Anderenfalls muss das Rissmuster energetisch bewertet werden, wobei abzuklären ist wie in diesem Fall die Bruchzähigkeit bestimmt wird.

7.2 Auswirkung der gemittelten Auswertung auf die Energiefreisetzungsrate

In diesem Abschnitt werden die unterschiedlichen Auswertungsmethoden für das Spannungskriterium verglichen und deren Einfluss auf die inkrementelle Energiefreisetzungsrate untersucht. Hierzu werden drei Risskonfigurationen näher betrachtet. Diese sind der interlaminare Riss über der Bi-Materialkerbe in Abbildung 4.4c, der interlaminare Riss vom gegenüberliegenden Rand in Abbildung 4.4d und das Durchreißen der Klebschicht von beiden Enden in Abbildung 4.4b. Alle drei Risskonfigurationen traten während der Kohäsivzonenmodellierung der Experimente von Ribeiro et al. (2016) und Neto et al. (2012) auf. Für die beiden interlaminaren Risskonfigurationen wird das Vorgehen aus Abbildung 7.1 angewendet.

7.2.1 Inter- und intralaminare Rissbildung über der Bi-Materialkerbe

Abbildung 7.3a zeigt das Spannungskriterium für den Bereich über der Bi-Materialkerbe für drei unterschiedliche Lasten. Die durchgezogene Linie entspricht der punkweisen Auswertung des Spannungskriteriums. Wegen dem nicht-monotonem Verlauf kann es bei der punkweisen Auswertung vorkommen, dass zwei benachbarte überlastete Bereiche auftreten, wie beispielsweise für $P=4.7$ kN. Mit der punkweisen Auswertung entsteht demzufolge ein Rissmuster. In Abbildung 7.3b wird die inkrementelle Energiefreisetzungsrate $\bar{\mathcal{G}} = \Sigma \Delta \Pi_i / \Sigma \Delta a_i$ für dieses

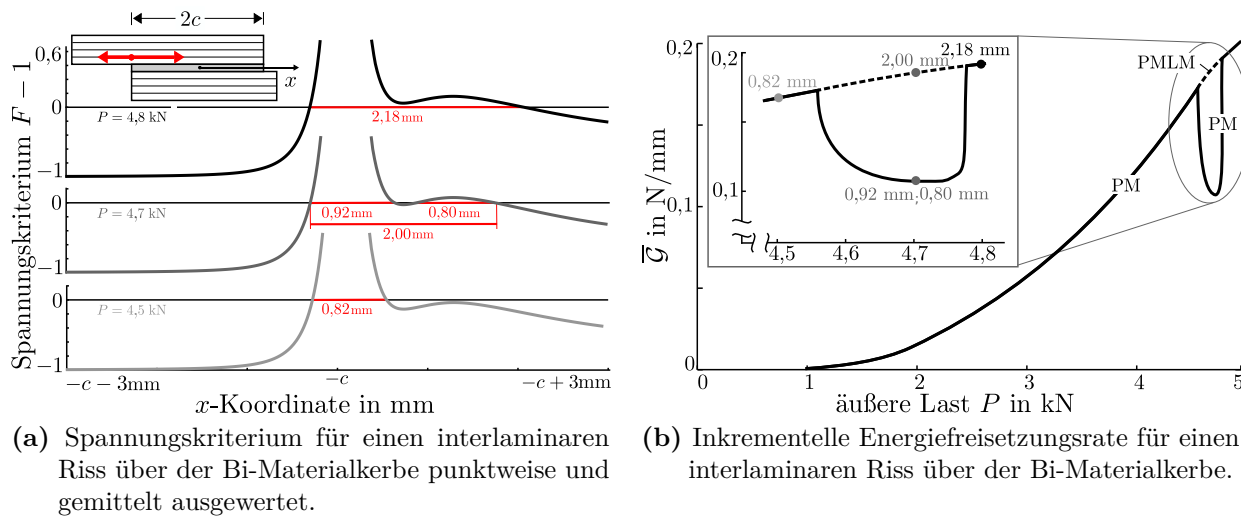
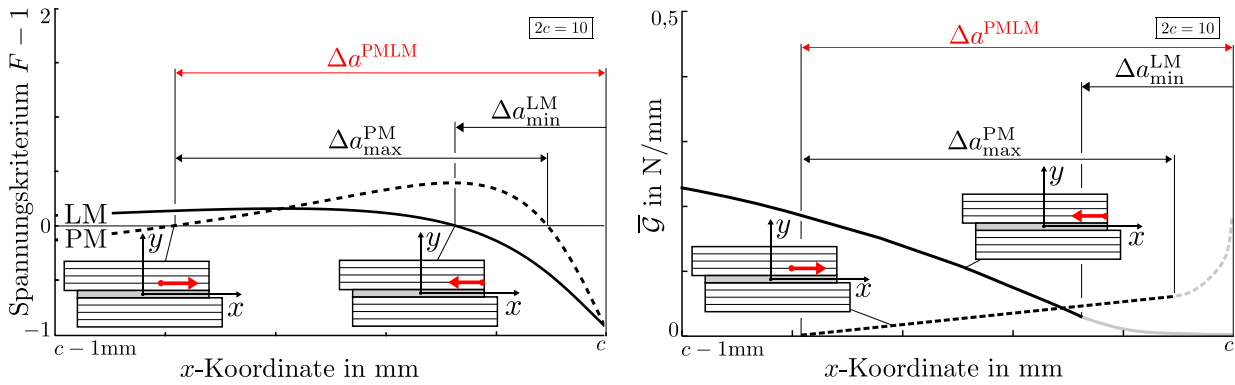


Abbildung 7.3: Konfiguration: Ribeiro et al. (2016) with $2c=10 \text{ mm}$.

Rissmuster untersucht. Zu sehen ist, dass die Energiefreisetzungsrate bei Auftreten des zweiten überlasteten Bereichs stark abnimmt. Der Grund hierfür liegt darin, dass die freigesetzte Energie durch einen Riss im zweiten Bereich kaum zunimmt wohingegen die Risslänge fast verdoppelt wird. Dieser durch die punktweise Auswertung des Spannungskriteriums F_{PM} induzierte Verlauf der Energiefreisetzungsrate kann bei der Lösung des Optimierungsproblems im Rahmen des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums zu Konvergenzproblemen führen. Für das Beispiel aus Abbildung 7.3 konnte keine Lösung für das Optimierungsproblem gefunden werden da $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_c$ in dem Bereich mit starken Gradienten lag. Im Falle einer gemittelten Auswertung des Spannungskriteriums F_{LM} ist die Wahl der Start- und Endpunkte für die Mittelung frei. Daraus folgt eine große Anzahl möglicher überlasteter Bereiche in denen Rissbildung untersucht werden müsste. Deshalb wird das Spannungskriterium in dieser Arbeit sequentiell als F_{PMLM} ausgewertet. Durch dieses Vorgehen können die beiden überlasteten Bereiche für den interlaminaren Riss über der Bi-Materialkerbe immer vereint werden. Dies führt zu einer Reduktion in der Rechenzeit, weil nur noch ein festgelegter überlasteter Bereich untersucht werden muss. Außerdem werden durch dieses Vorgehen die Konvergenzprobleme im Optimierungsproblem gelöst. Eine alternative Möglichkeit dem stark nicht-monotone Verhalten für die inkrementelle Energiefreisetzungsrate zu begegnen ist, das durch die punktweise Auswertung entstehende Rissmuster mit der Interaktionsbeziehung, Gleichung (7.2), zu bewerten. In diesem Fall kann ein zweiter Riss entstehen, es werden aber beide Risse als Einzerriss energetisch bewertet. Die Betrachtung als Rissmuster erfolgt erst in Gleichung (7.2). Das Rissmuster setzt in Summe eine geringere Energie frei als der vereinte Riss. Da eine reale Struktur aber immer den energetisch günstigsten Zustand des Energieminimums anstrebt, wird derjenige Riss initiiert welcher bei einer gegebenen Last am meisten Energie freisetzt. Dies ist in diesem Fall der vereinte Riss der mithilfe der sequentiellen Auswertung des Spannungskriteriums F_{PMLM} vorhergesagt werden kann.

7.2.2 Inter- und intralaminare Rissbildung vom gegenüberliegenden Rand

In den Experimenten von Ribeiro et al. (2016) ist der Versagensmodus ein interlaminarer Riss vom gegenüberliegenden Rand. Auch Keller u. Vallée (2005) und Kelly (2006) fanden in ihren



(a) Spannungskriterium für einen interlaminaren Riss vom gegenüberliegenden Rand punktweise und gemittelt ausgewertet.

(b) Inkrementelle Energiefreisetzungsrate für einen interlaminaren Riss vom gegenüberliegenden Rand.

Abbildung 7.4: Konfiguration: Ribeiro et al. (2016) with $2c=10$ mm für die Versagenslast.

Experimenten einen Riss, der vom gegenüberliegenden Rand, aber in der Klebschicht initiierte. Das weitere Risswachstum verlief aber als interlaminarer Riss wie in den Ergebnissen von Ribeiro et al. (2016). Das Besondere an einem Anriss vom gegenüberliegenden Rand ist, dass dieser in keinem Fall mit einer punktweisen Auswertung des Spannungskriteriums F_{PM} modelliert werden kann. Mit einem Blick auf den Spannungszustand in Abbildung 4.6b ist ersichtlich, dass bei $x=c$ die Schubspannungen $\tau_{xy}=0$ auf Null abfallen während die Normalspannungen $\sigma_y < 0$ sogar in den Druckbereich wechseln. Daraus folgt, dass das Spannungskriterium bei $x=c$ mit einer punktweisen Auswertung nicht erfüllt werden kann und der überlastete Bereich vollständig innerhalb der Struktur liegt, siehe Abbildung 7.4a. Deshalb sind mit einer punktweisen Auswertung nur Risse innerhalb des Laminats mit einer maximalen Risslänge $\Delta a^{\text{PM}}_{\text{max}}$ möglich. Um die Auswirkungen auf die Versagenslast beurteilen zu können werden im Folgenden die inkrementellen Energiefreisetzungsrate für Risse in diesem überlasteten Bereich untersucht. Dazu wird ein Riss betrachtet der an der Stelle $x=c-\Delta a^{\text{PMLM}}$ initiiert und Richtung Berandung wächst. Die inkrementelle Energiefreisetzungsrate für einen solchen Riss ist in Abbildung 7.4b dargestellt. Mit zunehmender Risslänge von $\Delta a=0$ bis $\Delta a=\Delta a^{\text{PM}}_{\text{max}}$ wächst \bar{G} linear an bis der gesamte überlastete Bereich gerissen ist. Wird die Risslänge weiter Richtung Rand ausgedehnt, zeigt sich ein starker Anstieg von \bar{G} . Dieser starke Anstieg in \bar{G} kann nur mit den größeren Rissflankenverschiebungen erklärt werden die auftreten wenn sich der Riss bis hin zur Berandung ausdehnt. Die Spannungen in diesem Bereich sind sehr klein bzw. negativ und generieren folglich keinen großen Beitrag zur Energiefreisetzungsrate. Auch hier kann der starke Gradient für den Fall, dass sich die rechte Risspitze in der Nähe der Berandung befindet zu Konvergenzproblemen im Optimierungsproblem führen. Außerdem sind die Versagenslasten in diesem Fall weit über den experimentellen Werten. Wird im Gegensatz dazu eine gemittelte Auswertung des Spannungskriteriums F_{LM} ausgeführt, müssen die Start- und Endpunkte für die Mittelung bestimmt werden. Da aus den experimentellen Befunden bekannt ist, dass der Riss von der Berandung initiiert ist der Startpunkt $x=c$ bekannt. In Abbildung 7.4a ist das Ergebnis der gemittelten Auswertung mit Startpunkt $x=c$ aufgetragen. Da das Spannungskriterium direkt am Rand nicht erfüllt ist muss ein potentieller Riss eine Mindestlänge $\Delta a=\Delta a^{\text{LM}}_{\text{min}}$ besitzen, um nach dem Spannungskriterium zulässig zu sein. Die inkrementellen Energiefreisetzungsrate für einen Riss der von der Berandung aus wächst sind in Abbildung 7.4b aufgetragen. Im Randbereich wird wegen der geringen Spannungen kein nennenswerter Anteil an Energie freigesetzt. Ab Risslängen $\Delta a=a^{\text{LM}}_{\text{min}}$ befindet

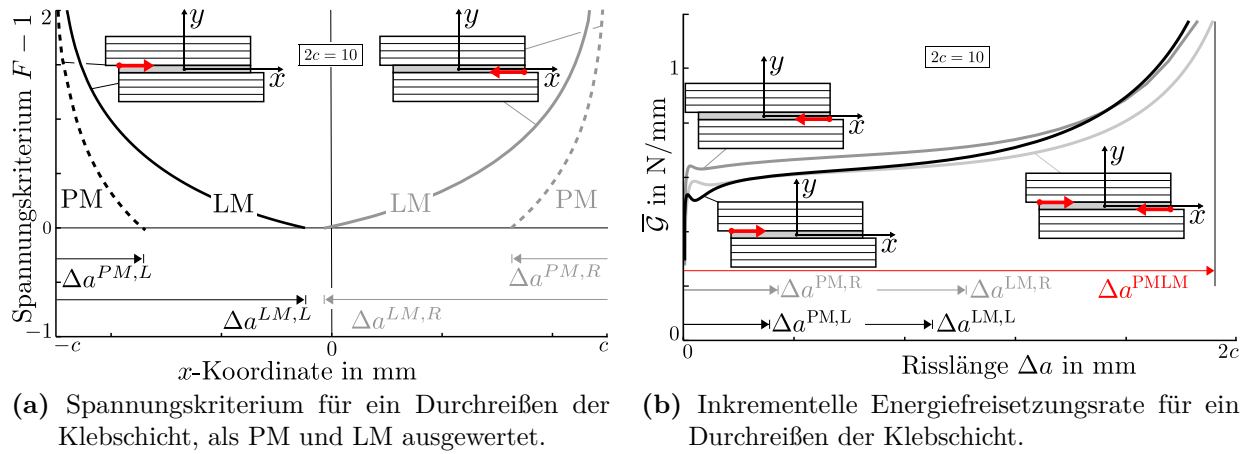


Abbildung 7.5: Konfiguration: Ribeiro et al. (2016) with $2c=10$ mm für die Versagenslast.

sich die finite Risslänge im von F_{LM} mit Startpunkt $x=c$ überlasteten Bereich. Für größere finiten Risslängen nimmt $\bar{\mathcal{G}}$ stetig zu. In dieser Arbeit wird die sequentielle Auswertung F_{PMLM} vorgeschlagen, um den Rechenaufwand zu reduzieren und trotzdem alle Vorteile der gemittelten Auswertung nutzen zu können. Mit diesem Vorgehen muss nur ein Riss ausgehend von der Berandung mit der Länge Δa^{PMLM} betrachtet werden.

7.2.3 Der adhäsive Durchriss

Eine dritte Risskonfiguration, die nicht mit einer punkweisen Auswertung des Spannungskriteriums vorhergesagt werden kann, ist das Durchreißen der Klebschicht, siehe Abbildung 4.4b. Diese Risskonfiguration trat bei der Kohäsivzonenmodellierung für das Klebschichtversagen einer Konfiguration aus Ribeiro et al. (2016) mit einer Überlappungslänge $2c=10$ mm auf. Das Versagen ist charakterisiert durch zwei Risse, die von den beiden Bi-Materialkerben zwischen Klebschicht und Füge teil initiieren und gemeinsam beinahe den gesamten Überlappungsbereich überspannen. In Abbildung 7.5a ist die punktweise und gemittelte Auswertung des Spannungskriteriums ausgehend von den jeweiligen Bi-Materialkerben bei $x=-c$ und $x=c$ für eine Last nahe der Versagenslast aufgetragen. Eine punktweise Auswertung erlaubt nur kleine Risslängen, weshalb das Energiekriterium nicht überschritten werden kann. Im Gegensatz dazu liefert eine gemittelte Auswertung zwei überlastete Bereiche die gemeinsam beinahe den gesamten Überlappungsbereich überspannen. In Abbildung 7.5b sind die entsprechenden Verläufe für die inkrementelle Energiefreisetzungsrate $\bar{\mathcal{G}} = \sum \Delta \Pi_i / \sum \Delta a_i$ für drei mögliche Risskonfigurationen aufgetragen. Für Einzelrisse sind die Energiefreisetzungsraten in jedem Fall zu gering, um Versagen mit $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_c = 1.18$ N/mm postulieren zu können. Dies gilt sowohl für die punktweise als auch die gemittelte Auswertung. Treten die beiden Risse $\Delta a^{LM,L}$ und $\Delta a^{LM,R}$ gemeinsam als Rissmuster auf führt das zu einem beinahe kompletten Durchreißen der Klebschicht wie es auch von der Kohäsivzonenmodellierung vorhergesagt wird. Im Fall des Durchreißen kann eine gemeinsame Bewertung mit $\bar{\mathcal{G}} = \sum \Delta \Pi_i / \sum \Delta a_i$ zu niedrigeren Versagenslasten führen als bei einer Bewertung der Einzelrisse. Dies ist hier der Fall, da es zu einer Interaktion der beiden Risse kommt durch welche die freigesetzte Energie des Rissmusters erheblich größer ist als die Summe der beiden Einzelrisse. Ist dies nicht der Fall gilt, dass mit $\bar{\mathcal{G}} = \sum \Delta \Pi_i / \sum \Delta a_i$ immer eine Versagenslast zwischen derjenigen der beiden Einzelrisse postuliert wird.

7.3 Versagenslasten

In diesem Abschnitt werden die Versagenslasten aus dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium mit den Versagenslasten der Kohäsivzonenmodellierung und experimentellen Werten aus der Literatur verglichen. Dabei wird das Spanningskriterium sequentiell als F_{PMLM} ausgewertet da hierdurch die Versagensmoden und -lasten der Kohäsivzonenmodellierung bzw. der Experimente mit geringem Rechenaufwand abgebildet werden können. Für das Energiekriterium werden die verschiedenen Formulierungen, Gleichungen (2.122) und (2.116) verglichen. Die benötigten Größen für die inkrementelle Energiefreisetzungsrate und die Bruchzähigkeit werden hierzu mit Gleichungen (2.108) und (7.1) bzw. Gleichungen (2.99), (2.120) und (7.4) bestimmt. Als experimentelle Grundlage dienen die Veröffentlichungen von Neto et al. (2012) und Ribeiro et al. (2016) in welchen als Versagensmodus interlaminares Versagen vorliegt. Für eine Versagenslastvorhersage mit dem gekoppelten Kriterium müssen die Versagenslasten für alle Versagensmoden einzeln ermittelt werden. Der Versagensmodus mit der geringsten Versagenslast ist letztendlich der versagensbestimmende, eintretende Modus.

7.3.1 Experimente von Neto et al.

In den Experimenten von Neto et al. (2012) liegt als Versagensmodus für Überlappungslängen $2c=30-80$ mm interlaminares Versagen vor. Für kürzere Überlappungslängen liegt Klebschichtversagen vor. Campilho et al. (2013) wiederholte die Experimente und berichtet von Klebschichtversagen für alle betrachteten Überlappungslängen. Im Folgenden werden beide Versagensmoden und die zugehörigen Versagenslasten mit dem gekoppelten Kriterium und einer Kohäsivzonenmodellierung verglichen.

Klebschichtversagen

In Abbildung 7.6a sind die experimentellen Versagenslasten von Neto et al. (2012) und Campilho et al. (2013) mit den Ergebnissen der Kohäsivzonenmodellierung für zwei unterschiedliche Energiekriterien verglichen. Das Potenzgesetz (PL1) wird mit $n=1$ ausgewertet und die Formulierung von Benzeggagh und Kane (BK3) mit $n=3$. Im Fall, dass der Moden-Mix nicht berücksichtigt wird (NM) wird $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_{\text{Ic}}$ angenommen und es ergibt sich folglich die kleinste effektive Bruchzähigkeit für das Energiekriterium und demzufolge auch die geringsten Versagenslasten. Das Potenzgesetz führt hingegen zu den höchsten Bruchzähigkeiten, da hier der Modus II stärker berücksichtigt wird als für die Formulierung nach Benzeggagh und Kane. Insgesamt zeigt die Interaktionsbeziehung von Benzeggagh und Kane die beste Übereinstimmung mit den Experimenten.

Deshalb werden die Ergebnisse des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums für die Formulierung von Benzeggagh und Kane verglichen. Hierbei wird das Spanningskriterium einmal punktweise (PM) und einmal in gemittelter Form (LM) ausgewertet. Außerdem werden die beiden Formulierungen $\bar{\mathcal{G}}_c$ und \mathcal{G}_c verglichen. Klebschichtversagen findet durch Rissinitiierung ausgehend vom Kerbgrund der Bi-Materialkerbe an den Überlappungsenden statt. Da das Spanningskriterium in diesem Bereich einen monotonen Verlauf aufweist, ist damit zu rechnen, dass alle Formulierungen zu ähnlichen Versagenslasten führen, wobei die punktweise Auswertung etwas höhere Versagenslasten vorhersagt als die gemittelte Auswertung da mit der gemittelten Auswertung größere Risslängen möglich sind. Diese Zusammenhänge zeigen

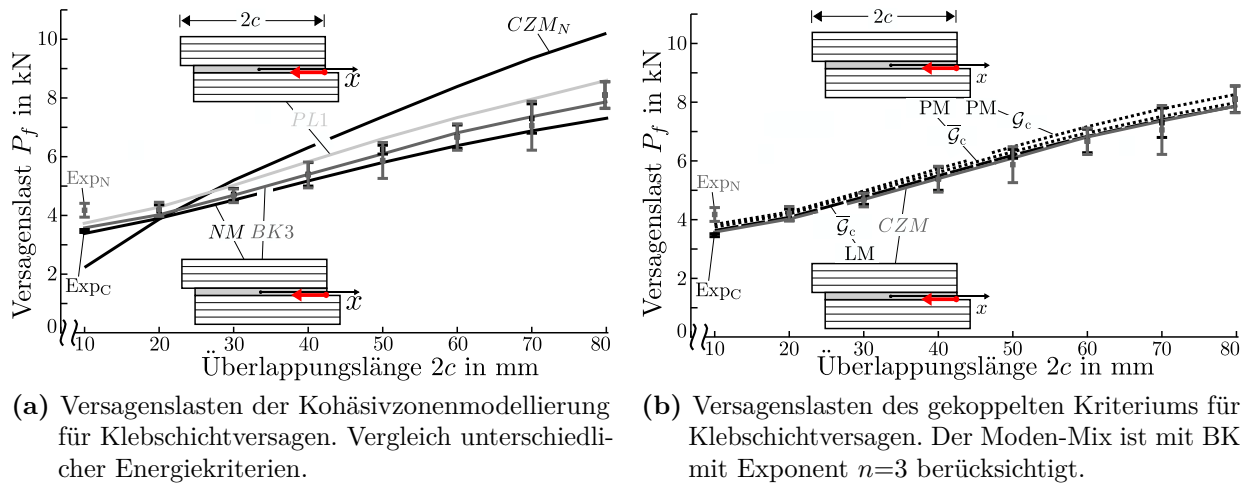


Abbildung 7.6: Versagenslasten für Klebschichtversagen. Die experimentellen Daten (Exp_N) und (Exp_C) stammen von Neto et al. (2012) bzw. Campilho et al. (2013). Die Ergebnisse (CZM_N) sind ebenfalls aus Neto et al. (2012) übernommen.

sich in Abbildung 7.6b. Alle Formulierungen liefern eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten und den Ergebnissen der Kohäsivzonenmodellierung. Die gemittelte Auswertung des Spannungskriteriums mit einer Bruchzähigkeit \bar{g}_c zeigt die beste Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Kohäsivzonenmodellierung.

Interlaminares Versagen

Als nächstes wird interlaminares Versagen bewertet. Dazu werden zu erst die interlaminaren Versagenslasten der Kohäsivzonenmodellierung mit den Versagenslasten für Klebschichtversagen verglichen. Als interlaminare Festigkeiten und Bruchzähigkeiten werden die Werte von Neto et al. (2012) und Ribeiro et al. (2016) mit den in Unterabschnitt 4.1.1 bestimmten Werten verglichen. In Abbildung 7.7a ist zu sehen, dass Klebschichtversagen für die Struktursituation aus Neto et al. (2012) und Campilho et al. (2013) der dominante Versagensmodus ist und demzufolge die niedrigsten Versagenslasten liefert. Dieses Ergebnis liegt in Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden von Campilho et al. (2013). Die interlaminaren Versagenslasten mit den Werten aus Ribeiro et al. (2016) liegen leicht über den Versagenslasten der Klebschicht und mit den in Unterabschnitt 4.1.1 bestimmten Werten liegen die Versagenslasten deutlich über den Versagenslasten der Klebschicht. Die Versagenslasten mit den Werten aus Neto et al. (2012) sind so hoch, dass sie außerhalb des dargestellten Bereichs liegen. Bei Erreichen der Versagenslast liegt in der Kohäsivzonenmodellierung im Bereich $2c=10$ mm ein Riss über der Bi-Materialkerbe und im Bereich $2c=20-80$ mm ein Rissmuster aus einem Riss über der Bi-Materialkerbe und einem Riss vom gegenüberliegenden Rand vor. Der Riss vom gegenüberliegenden Rand tritt nicht als Einzelriss auf aber für $2c=10$ mm nimmt dort die Schädigungsvariable der Kohäsivzonenmodellierung große Werte an. Für das gekoppelte Kriterium müssen alle möglichen Risskonfigurationen untersucht werden. Deshalb werden die beiden Einzelrisse und das Rissmuster einzeln bewertet. Als Spannungskriterium wird F_{PMLM} verwendet. Für die beiden Einzelrisse wird die Bruchzähigkeit mit Gleichung (2.99) ermittelt und für das Rissmuster mit Gleichung (7.3). In Abbildung 7.7b ist zu sehen, dass die Übereinstimmung der Modellierung des Rissmusters im Bereich $2c=20-80$ mm, wo auch die Kohäsivzonenmodellierung ein Rissmuster vorhersagt, sehr gut ist. Für $2c=10$ mm weichen die

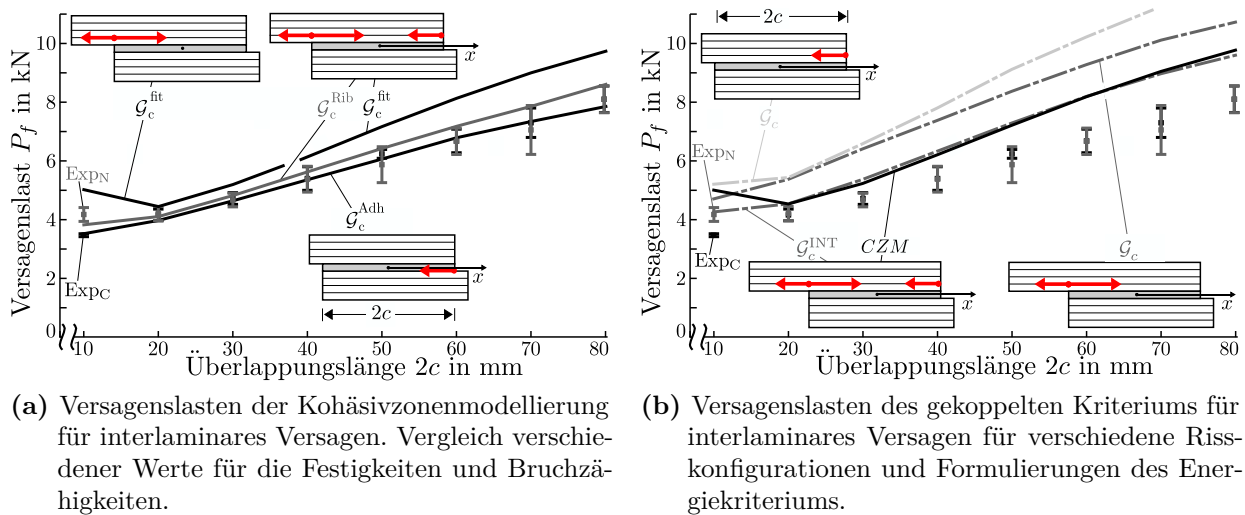


Abbildung 7.7: Versagenslasten für interlaminares Versagen. Die experimentellen Daten (Exp_N) und (Exp_C) stammen von Neto et al. (2012) bzw. Campilho et al. (2013). Für das gekoppelte Kriterium wurde das Spannungskriterium als F_{PMLM} ausgewertet.

Ergebnisse voneinander ab. Hier ist die Risskonfiguration aus der Kohäsivzonenmodellierung wegen der hohen Schädigung im gegenüberliegenden Bereich nicht eindeutig wohingegen mit dem gekoppelten Kriterium nur eindeutige Risskonfigurationen abgebildet werden können. Das gekoppelte Kriterium prognostiziert auch für $2c=10$ mm ein Rissmuster und eine niedrigere Versagenslast als die Kohäsivzonenmodellierung. Es ist allerdings möglich, dass die Risskonfiguration nach Initiierung des Rissmusters nicht kritisch ist und somit die Last weiter erhöht werden kann bis der Lastabfall eintritt. In diesem Fall würde die Versagenslast höher liegen als mit der Annahme, dass mit Rissinitiierung Totalversagen eintritt.

Die Experimente von Neto et al. (2012) und Campilho et al. (2013) liefern widersprüchliche Aussagen bezüglich der Versagensmoden im Bereich $2c=30-80$ mm. Die Kohäsivzonenmodellierung und das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium prognostizieren, in Übereinstimmung mit Campilho et al. (2013), eindeutig Klebschichtversagen.

7.3.2 Experimente von Ribeiro et al.

In der experimentellen Arbeit von Ribeiro et al. (2016) werden unausgeglichene Überlappungsklebung mit Fügeteilen aus Aluminium und Faser-Kunststoff-Verbunden untersucht. Als Versagensmodus wird für alle untersuchten Konfigurationen interlaminares Versagen mit einem Riss vom gegenüberliegenden Rand angegeben. In dieser Arbeit wird zusätzlich das Klebschichtversagen untersucht, da für eine zuverlässige Versagenslastvorhersage mit dem gekoppelten Kriterium die Versagenslasten für alle Versagensmoden miteinander verglichen werden müssen. Derjenige Versagensmodus mit der geringsten Versagenslast ist somit der kritische, versagenslastbestimmende Modus. In Abbildung 7.8a sind die Versagenslasten für Klebschichtversagen aufgetragen. Abgebildet sind die experimentell ermittelten Versagenslasten Exp_R , die Ergebnisse der Kohäsivzonenmodellierung und die Ergebnisse aus dem gekoppelten Kriterium ausgewertet mit unterschiedlichen Formulierungen des Spannungskriteriums. Mit der Kohäsivzonenmodellierung ergibt sich für $2c=20-40$ mm ein Riss in der Klebschicht auf der Seite des weicheren Aluminium-Fügeteils. Für $2c=10$ mm tritt der in Unterabschnitt 7.2.3 diskutierte adhäsive Durchriss mit zwei Rissen an beiden Enden

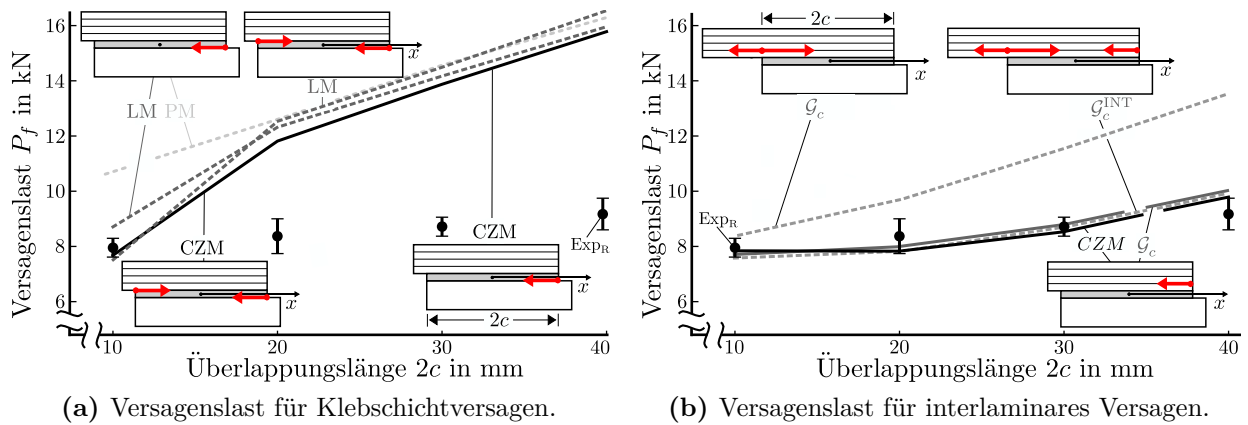


Abbildung 7.8: Experimentelle Versagenslasten sind Ribeiro et al. (2016) entnommen.

des Überlappungsbereichs auf. Diese Risskonfiguration führt zu einem enormen Abfallen der Versagenslast. Die Ergebnisse aus dem gekoppelten Kriterium mit punktwiser und gemittelter Auswertung des Spannungskriteriums stimmen für $2c=20-40$ mm gut mit den Versagenslasten aus der Kohäsivzonenmodellierung überein. Das Abfallen der Versagenslast kann ebenfalls abgebildet werden, wenn die entsprechende Risskonfiguration des adhäsiven Durchreißen berücksichtigt wird. Diese Risskonfiguration kann nur mit der gemittelten Auswertung des Spannungskriteriums modelliert werden. Für Überlappungslängen $2c=10$ mm erscheint Klebschichtversagen als möglicher Versagensmodus während die Versagenslasten für größere Überlappungslängen weit oberhalb der experimentellen Werte liegen. Als interlaminares Versagensmodus tritt bei der Kohäsivzonenmodellierung ein Riss vom gegenüberliegenden Rand auf während die Kohäsivzonenelemente über der Bi-Materialkerbe gleichzeitig in den Entfestigungsbereich eintreten. Mit dem gekoppelten Kriterium ergibt sich für einen Riss über der Bi-Materialkerbe eine zu hohe Versagenslast, da durch Risse in diesem Bereich nur wenig Energie freigesetzt wird. Für einen Einzerriss vom gegenüberliegenden Rand ergibt sich hingegen eine gute Übereinstimmung mit den Versagenslasten der Kohäsivzonenmodellierung und den experimentellen Werten, da in diesem Fall die gleiche Risskonfiguration vorliegt. Werden die beiden Einzerrisse gemeinsam als Rissmuster mit \mathcal{G}_c^{INT} bewertet, ergeben sich geringfügig kleinere Versagenslasten als bei einer Bewertung des Risses vom gegenüberliegenden Rand als Einzerriss. Dies liegt daran, dass der Riss über der Bi-Materialkerbe nur wenig Energie freisetzt. Diese Tatsache ist auch in der Kohäsivzonenmodellierung ersichtlich, da der Bereich über der Bi-Materialkerbe bei Erreichen der Versagenslast gerade erst in den Entfestigungsbereich eintritt. In beiden Methoden liefert der Riss über der Bi-Materialkerbe also beinahe keinen Beitrag zur freigesetzten Energie und hat somit auch keinen Einfluss auf die Versagenslast. Letztendlich prognostiziert die Kohäsivzonenmodellierung und das gekoppelte Kriterium interlaminares Versagen für Überlappungslängen $2c=20-40$ mm und für $2c=10$ mm ein Durchreißen der Klebschicht. Im Experiment trat für alle Überlappungslängen interlaminares Versagen auf. Die Versagenslastvorhersagen für die Kohäsivzonenmodellierung und das gekoppelte Kriterium liegen in guter Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Werten.

7.4 Zusammenfassung

Mit dem in diesem Kapitel beschriebenen Vorgehen lassen sich die experimentell beobachteten und/oder durch eine Kohäsivzonenmodellierung bestätigten Versagensmoden auch mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium effizient beschreiben. Dazu musste die Auswertung des gekoppelten Kriteriums auf nicht-monotone Spannungsfelder erweitert werden. Falls das Spanningskriterium im überlasteten Bereich einen monotonen Verlauf aufweist, ist die Versagenslast für eine punktweise Auswertung nur geringfügig höher als für die gemittelte Auswertung des Spanningskriteriums. Der Grund hierfür ist, dass eine gemittelte Auswertung etwas längere Risse erlaubt. Trotzdem liefern beide Verfahren eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Werten und Ergebnissen aus der Kohäsivzonenmodellierung. Im Gegensatz dazu können die Versagenslasten im Fall eines nicht-monotonen Verlaufs des Spanningskriteriums stark voneinander abweichen. Einzelne Versagensmoden, wie beispielsweise der Riss vom gegenüberliegenden Rand, können sogar nur mit der gemittelten Auswertung des Spanningskriteriums abgebildet werden. Durch die nicht-monotonen Spannungsverläufe kann es vorkommen, dass gleichzeitig mehrere überlastete Bereiche auftreten und somit Rissmuster ermöglicht werden. Die energetische Bewertung von Rissmustern im Rahmen des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums wurde in diesem Kapitel dargelegt. Eine Interaktionsbeziehung zwischen den Einzelrissen ergab hierbei die beste Übereinstimmung zwischen dem gekoppelten Kriterium und der Kohäsivzonenmodellierung. Alle anderen Modellierungsansätze ergaben zu hohe Versagenslasten. Weiterhin wird in diesem Kapitel gezeigt, dass eine sequentielle Auswertung in punktwieser und gemittelter Form zu einer effizienten Analyse führt. Durch die sequentielle Auswertung können überlastete Bereiche miteinander vereint oder bis zur Berandung ausgedehnt werden. Somit können die Vorteile beider Methoden miteinander kombiniert werden und die Anzahl der zu analysierenden Risskonfigurationen verringert werden.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Bei der experimentellen Untersuchung von Überlappungsklebungen mit FKV-Fügeteilen tritt häufig transversales Fügeteilversagen auf. Da für diesen Versagensmodus meist eine interlaminare Rissinitiierung vermutet wird wurde dieser Initiierungsmechanismus in der vorliegenden Arbeit untersucht. Da interlaminares Versagen spröde verläuft ist das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der finiten Bruchmechanik sehr gut zur Versagenslastvorhersage geeignet. Zur Auswertung müssen die Spannungsfelder und die inkrementellen Energiefreisetzungsraten für die finite Rissentstehung bekannt sein. Diese beiden Größen können analytisch oder numerisch berechnet werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein analytische Balkenmodell für die einschnittige Überlappungsklebung beschrieben. Die Formulierung ermöglicht es in allen Teilbereichen das geometrisch nichtlineare Verhalten zu berücksichtigen. Die Spannungsanalyse zeigt eine sehr gute Übereinstimmung in der Mitte des Überlappungsbereichs während die schwach Singulären Spannungsfelder an den Überlappungsenden nicht abgebildet werden können. Für die Bestimmung der inkrementellen Energiefreisetzungsrates folgt, dass die Ergebnisse für lange Risse gut mit der Referenzlösung übereinstimmen während die Ergebnisse für kurze Risse stark von der Referenzlösung abweichen. Trotzdem kann der interlaminare Riss vom gegenüberliegenden Rand mit diesem Modell bewertet werden. Die ermittelten Versagenslasten stimmen dabei gut mit den experimentellen Werten überein. Weiterhin liefert die Modellierung mit äquivalenten Einzelschichten eine effiziente Methode, um die Schnittgrößen an den Überlappungsenden zu ermitteln. Die Schnittgrößen können als Randbedingungen für generalisierte Sandwich-Modelle bzw. numerische Ersatz-Modelle welche nur den Überlappungsbereich abbilden wichtige Eingangsgrößen sein.

Eine Erweiterung des Balkenmodells um interlaminares Versagen über der Bi-Materialkerbe oder auch Rissmuster bewerten zu könnten wäre durch einführen von Schwachschichten mit reduzierter Kinematik möglich. Dieser Modellierungsansatz wurde schon zur Bewertung von Klebschichtversagen erfolgreich eingesetzt. Um diesen Modellierungsansatz auf interlaminares Versagen zu erweitern müssten zusätzliche interlaminare Schwachschichten zwischen den Einzelschichten des FKV-Fügeteils eingefügt werden. Um den Riss über der Bi-Materialkerbe abbilden zu können, müsste allerdings ein Bereich modelliert werden, welcher etwas größer ist als der Überlappungsbereich. Das geometrisch nichtlineare Verhalten kann in diesem Fall nur in den äußeren Bereichen modelliert werden. Durch diese Art der Modellierung muss die Überlappungsklebung in viele Teilgebiete aufgeteilt werden und eine große Anzahl an Rand- und Übergangsbedingungen berücksichtigt werden. Das resultierende Gleichungssystem müsste wahrscheinlich semi-analytisch gelöst werden. Als Eingangsgrößen für die Schnittgrößen können die Ergebnisse des vorliegenden Modells verwendet werden.

Soll die inkrementelle Energiefreisetzungsrates nach Rissöffnungsmoden getrennt bestimmt werden ist die numerische Berechnung mit dem Rissöffnungsintegral vorteilhaft. Es wurde ge-

zeigt, dass zur Auswertung des Rissöffnungsintegrals im Rahmen der nichtlinearen Elastizität zuerst abgeklärt werden muss ob die Linearisierung wie sie in der linear-elastischen Bruchmechanik verwendet wird zulässig ist. Ist der Zusammenhang zwischen den Knotenkräften und -verschiebungen während der Entlastung der Rissflanken linear ist auch die Linearisierung zulässig. Für die einschnittige Überlappungsklebung wurde gezeigt, dass der Linearisierungsfehler bei vorliegen von linear elastischem Materialverhalten bei gleichzeitiger geometrischen Nichtlinearität meist klein ausfällt. Liegt zusätzlich nichtlineares Materialverhalten vor ist die Linearisierung in den meisten Fällen nicht mehr zulässig. Außerdem können sich die Rissflanken wegen großer Verschiebungen während des Entlastungsvorgangs krümmen. Um die Rissöffnungsmoden trotzdem in Anteile normal und tangential zu den Rissflanken aufzuteilen wurde die Verwendung lokaler mitbewegter Koordinatensysteme vorgeschlagen. Mangels nicht vorhandener Versuchsdaten steht eine Validierung dieser Aufteilung aus. Weiterhin wäre es vorteilhaft die Zulässigkeit der Linearisierung im Vorfeld einer Analyse überprüfen zu können da die Auswertung im nichtlinearen Fall sehr Rechenzeitintensiv ist. Dies könnte im Fall der geometrischen Nichtlinearität anhand der Last-Verschiebungskurve der Gesamtstruktur und im Fall der Materialnichtlinearität anhand des Arbeitspunktes im Materialgesetz geschehen. Außerdem kann der Vergleich der linearisierten Auswertung des Rissöffnungsintegrals mit der Energiefreisetzung, ermittelt aus der Änderung des Gesamtpotentials, einen Hinweis auf die Zulässigkeit der Linearisierung geben.

Abschließend wurde die Anwendung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums auf Fälle mit nicht-monotonem Spannungsverlauf diskutiert. Durch den nicht-monotonen Verlauf stellt sich die Frage wie mehrere, gleichzeitig auftretende überlastete Bereiche behandelt werden können. In dieser Arbeit wird hierzu ein zweistufiges Verfahren vorgeschlagen. Zuerst wird durch eine gemittelte Auswertung des Spannungskriteriums überprüft ob sich die einzelnen Bereiche vereinen oder bis zur Berandung hin ausdehnen lassen. Ist dies nicht möglich werden die Möglichkeiten diskutiert wie mit Rissmustern bei der Auswertung des Energiekriteriums umgegangen werden kann. Gezeigt wird, dass die Ergebnisse gut mit der Kohäsivzonenmodellierung übereinstimmen. Die Validierung mit Versuchsdaten steht noch aus. Weiterhin sollte mit dem numerischen Modell untersucht werden wie sich die Versagenslast entwickelt wenn für das transversale Füge teilversagen andere Initiierungsmechanismen als das interlaminare Versagen zugrunde gelegt werden. Diese könnten je nach Schichtwinkel Rissinitiierung als Faserbruch bzw. Zwischenfaserbruch ausgehend von der Bi-Materialkerbe sein wobei sich der entstehende Riss möglicherweise bis in den interlaminaren Bereich erstreckt. Falls sich der initiiierende Riss über zwei Bereiche ausdehnt, beispielsweise Faserbruch (a_F, \mathcal{G}_c^F) und interlaminarer Bruch (a_I, \mathcal{G}_c^I), kann dies durch folgende Formulierung im Energiekriterium berücksichtigt werden:

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{G}_c^F a_F + \mathcal{G}_c^I a_I}{a_F + a_I}$$

Außerdem steht eine Erweiterung auf ein dreidimensionales Modell aus. Durch die zweidimensionale Modellierung wird das Anwendungsgebiet durch die Anforderungen an den Lagenaufbau stark beschränkt. Durch eine dreidimensionale Modellierung sind keine zusätzlichen Anforderungen an den Lagenaufbau nötig. Zusätzliche Herausforderungen bei der dreidimensionalen Modellierung ist neben den erhöhten Rechenzeiten die Geometrie der Rissfläche und der Ort der Rissinitiierung.

Anhang A

Materialdaten

In Tabelle A.1 sind die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Materialdaten aufgelistet. Es wurde der kohlenstofffaserverstärkte Kunststoff Texipreg HS 160 RM (Neto et al. (2012), Ribeiro et al. (2016)) und Aluminium AA6082 T651 in einer Kombination mit den Klebstoffsystemen AV138 (Neto et al. (2012)), XNR6823 (Ribeiro et al. (2016)) oder Loctite330 (Pirondi u. Nicoletto (2008), Goglio et al. (2008)) verwendet. Zur Auswertung des Rissöffnungintegrals für hyperelastische Materialien wird zusätzlich ein Silikon DC993, Staudt (2018), mit Neo-Hooke-Materialgesetz verwendet. Für den faserverstärkten Kunststoff entspricht die x-Richtung der Faserrichtung.

		Alu	Texipreg	AV 138	XNR6823	Loctite330	DC993
E_x	MPa	70 000	109 000	4 890	2 600	880	1,846
E_y	MPa	70 000	8 819	4 890	2 600	880	1,846
E_z	[MPa	70 000	8 819	4 890	2 600	880	1,846
ν_{xz}	-	0,30	0,342	0,35	0,30	0,15	0,475
ν_{yz}	-	0,30	0,38	0,35	0,30	0,15	0,475
ν_{xy}	-	0,30	0,342	0,35	0,30	0,15	0,475
G_{xz}	MPa	26 923	4 315	1 811	1 000	383	0,626
G_{yz}	MPa	26 923	3 200	1 811	1 000	383	0,626
G_{xy}	MPa	26 923	4 315	1 811	1 000	383	0,626
R_{\parallel}^+	MPa	-	1 700	39,5	57,0	8,6	-
R_{\perp}^+	MPa	-	-	39,5	57,0	8,6	-
$R_{\perp\parallel}$	MPa	-	60,0	30,2	32,9	-	-
\mathcal{G}_{Ic}	N/mm	-	-	0,345	1,18	0,38	-
\mathcal{G}_{IIc}	N/mm	-	-	0,6	1,5	-	-

Tabelle A.1: Materialdaten für Texipreg HS 160 RM, Aluminium AA6082 T651, AV138, XNR6823, Loctite330 und DC993

Anhang B

Konstanten für das analytische Modell

Die Konstanten sind so angeordnet, dass sie der Reihe nach direkt implementiert werden können. Die äußere Last muss entweder in N/mm gegeben werden oder durch $P \rightarrow P/b$ ersetzt werden.

B.1 Konstanten für die gelenkige Lagerung

$$\begin{aligned} p_{\lambda 1} &= \exp\left(\frac{l_1}{\lambda^{(1)}}\right), & m_{\lambda 1} &= \exp\left(-\frac{l_1}{\lambda^{(1)}}\right) \\ p_{\lambda 0} &= \exp\left(\frac{2c}{\lambda^{(0)}}\right), & m_{\lambda 0} &= \exp\left(-\frac{2c}{\lambda^{(0)}}\right) \\ p_{\lambda 2} &= \exp\left(\frac{l_2}{\lambda^{(2)}}\right), & m_{\lambda 2} &= \exp\left(-\frac{l_2}{\lambda^{(2)}}\right) \end{aligned}$$

(B.1)

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \\ \gamma_{011} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{2B_{11}^{(0)}}{A_{11}^{(0)}} + 2\gamma_{11}p_{\lambda 1} + h_2 + t \right) \\ \gamma_{012} &= (m_{\lambda 1} - p_{\lambda 1}) \\ \varrho_{021} &= K_S^{(1)} A_{55}^{(1)} K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} \gamma_{011} \lambda^{(1)} - K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} \gamma_{011} P \lambda^{(1)} \\ \beta_{021} &= K_S^{(1)} A_{55}^{(1)} K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} \gamma_{11} p_{\lambda 1} \lambda^{(0)} - K_S^{(1)} A_{55}^{(1)} \gamma_{11} p_{\lambda 1} P \lambda^{(0)} \\ \gamma_{021} &= \frac{\varrho_{021} - \beta_{021}}{2K_S^{(1)} A_{55}^{(1)} K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} \lambda^{(1)} - 2K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} P \lambda^{(1)}} \\ \varrho_{022} &= K_S^{(1)} A_{55}^{(1)} K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} \gamma_{012} \lambda^{(1)} - K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} \gamma_{012} P \lambda^{(1)} + K_S^{(1)} A_{55}^{(1)} K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} \lambda^{(0)} m_{\lambda 1} \\ \beta_{022} &= K_S^{(1)} A_{55}^{(1)} K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} p_{\lambda 1} \lambda^{(0)} - K_S^{(1)} A_{55}^{(1)} P \lambda^{(0)} m_{\lambda 1} - K_S^{(1)} A_{55}^{(1)} P \lambda^{(0)} p_{\lambda 1} \\ \gamma_{022} &= \frac{\varrho_{022} + \beta_{022}}{2K_S^{(1)} A_{55}^{(1)} K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} \lambda^{(1)} - 2K_S^{(0)} A_{55}^{(0)} P \lambda^{(1)}} \\ \gamma_{21} &= \frac{B_{11}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} m_{\lambda 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{221} &= \frac{\frac{B_{11}^{(0)}}{A_{11}^{(0)}} - \frac{B_{11}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} + \gamma_{21} - \gamma_{021}m_{\lambda 0} - \gamma_{011}p_{\lambda 0} + \gamma_{021}p_{\lambda 0} - \frac{h_1+t}{2}}{-1 + m_{\lambda 2}^2} \\
\gamma_{222} &= \frac{-\gamma_{022}m_{\lambda 0} - \gamma_{012}p_{\lambda 0} + \gamma_{022}p_{\lambda 0}}{-1 + m_{\lambda 2}^2} \\
\varrho_{121} &= \gamma_{21}p_{\lambda 0}\lambda^{(0)} - \gamma_{221}p_{\lambda 0}\lambda^{(0)} + \left(\gamma_{021} - \gamma_{011}p_{\lambda 0}^2 + \gamma_{021}p_{\lambda 0}^2\right)\lambda^{(2)} \\
\beta_{121} &= K_S^{(2)}A_{55}^{(2)}(\gamma_{21} - \gamma_{221})p_{\lambda 0}P\lambda^{(0)} \\
\gamma_{121} &= \beta_{121} + K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}\left(\left(\gamma_{021} - \gamma_{011}p_{\lambda 0}^2 + \gamma_{021}p_{\lambda 0}^2\right)P\lambda^{(2)} - K_S^{(2)}A_{55}^{(2)}\varrho_{121}\right) \\
\varrho_{122} &= \left(-\gamma_{222}p_{\lambda 0}\lambda^{(0)} - p_{\lambda 0}m_{\lambda 2}\lambda^{(0)} + \gamma_{022}\lambda^{(2)} - (\gamma_{012} - \gamma_{022})p_{\lambda 0}^2\lambda^{(2)}\right) \\
\beta_{122} &= K_S^{(2)}A_{55}^{(2)}(\gamma_{222} + m_{\lambda 2}^2)p_{\lambda 0}P\lambda^{(0)} \\
\gamma_{122} &= \beta_{122} + K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}\left(-\left(\gamma_{022} - \gamma_{012}p_{\lambda 0}^2 + \gamma_{022}p_{\lambda 0}^2\right)P\lambda^{(2)} + K_S^{(2)}A_{55}^{(2)}\varrho_{122}\right)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
C_{12} &= \frac{\gamma_{121}}{\gamma_{122}}, & C_{11} &= \gamma_{11} - C_{12} \\
C_{02} &= \gamma_{021} + \gamma_{022}C_{12}, & C_{01} &= \gamma_{011} + \gamma_{012}C_{12} - C_{02} \\
C_{22} &= \gamma_{221} + \gamma_{222}C_{12}, & C_{21} &= \gamma_{21} - m_{\lambda 2}^2C_{22}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

B.2 Konstanten für die feste Einspannung

$$\begin{aligned}
p_{\lambda 1} &= \exp\left(\frac{l_1}{\lambda^{(1)}}\right), & m_{\lambda 1} &= \exp\left(-\frac{l_1}{\lambda^{(1)}}\right) \\
p_{\lambda 0} &= \exp\left(\frac{2c}{\lambda^{(0)}}\right), & m_{\lambda 0} &= \exp\left(-\frac{2c}{\lambda^{(0)}}\right) \\
p_{\lambda 2} &= \exp\left(\frac{l_2}{\lambda^{(2)}}\right), & m_{\lambda 2} &= \exp\left(-\frac{l_2}{\lambda^{(2)}}\right)
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{2B_{11}^{(1)} - A_{11}^{(1)}(h_1 + h_2 + 2t)}{2A_{11}^{(1)}} \\
\gamma_{12} &= \frac{(-P\lambda_1 + K_S^{(1)}A_{55}^{(1)}(2c + l_1 + l_2 + \lambda_1))}{2PK_S^{(1)}A_{55}^{(1)}} \\
\gamma_{221} &= \frac{B_{11}^{(2)}p_{\lambda 2}}{2A_{11}^{(2)}} \\
\gamma_{222} &= \frac{p_{\lambda 2}}{2P}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{223} &= \frac{p_{\lambda_2}(A_{11}^{(2)}K_S^{(2)}A_{55}^{(2)}\lambda_2 - P\lambda_2A_{11}^{(2)})}{2PA_{11}^{(2)}K_S^{(2)}A_{55}^{(2)}} \\
\gamma_{011} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{2B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{2B_{11}^{(0)}}{A_{11}^{(0)}} + \gamma_{11}m_{\lambda_1} + \gamma_{11}p_{\lambda_1} + h_2 + t\right) \\
\gamma_{012} &= -\frac{m_{\lambda_1}(1 + p_{\lambda_1}^2)}{2P} \\
\gamma_{013} &= \frac{m_{\lambda_1}((2c + l_1 + l_2)p_{\lambda_1}^2 + \gamma_{12}(P - Pp_{\lambda_1}^2))}{P} \\
\beta_{021} &= \frac{K_S^{(1)}A_{55}^{(1)}\gamma_{11}m_{\lambda_1}(-1 + p_{\lambda_1}^2)}{(K_S^{(1)}A_{55}^{(1)} - P)\lambda_1} - \frac{2K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}\gamma_{011}}{K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}\lambda_0 - P\lambda_0} \\
\beta_{022} &= (P(m_{\lambda_1} - p_{\lambda_1})\lambda_0 + K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}(2\gamma_{012}P\lambda_1 + (-m_{\lambda_1} + p_{\lambda_1})\lambda_0)) \\
\beta_{023} &= (-\gamma_{013}P\lambda_1 + ((2c + l_1 + l_2)p_{\lambda_1} - \gamma_{12}m_{\lambda_1}P(1 + p_{\lambda_1}^2))\lambda_0) \\
\beta_{024} &= (P(-(2c + l_1 + l_2)p_{\lambda_1} + \gamma_{12}m_{\lambda_1}P(1 + p_{\lambda_1}^2))\lambda_0 + K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}\beta_{023}) \quad (B.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{021} &= -\frac{(K_S^{(0)}A_{55}^{(0)} - P)\lambda_0\beta_{021}}{4K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}} \\
\gamma_{022} &= \frac{-2K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}\gamma_{012}P^2\lambda_1 + K_S^{(1)}A_{55}^{(1)}\beta_{022}}{4K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}(K_S^{(1)}A_{55}^{(1)} - P)P\lambda_1} \\
\gamma_{023} &= -\frac{K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}\gamma_{013}P^2\lambda_1 + K_S^{(1)}A_{55}^{(1)}\beta_{024}}{2K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}(K_S^{(1)}A_{55}^{(1)} - P)P\lambda_1} \\
\beta_{ME1} &= (-2\gamma_{021}(-1 + p_{\lambda_0}^2) + p_{\lambda_0}(h_1 + 2\gamma_{221}(-1 + m_{\lambda_2}^2) + 2\gamma_{011}p_{\lambda_0} + t)) \\
\gamma_{ME1} &= \frac{(P(-2A_{11}^{(2)}B_{11}^{(0)}p_{\lambda_0} + A_{11}^{(0)}(-2B_{11}^{(2)}(-1 + m_{\lambda_2})p_{\lambda_0} + A_{11}^{(2)}\beta_{ME1})))}{(2A_{11}^{(0)}A_{11}^{(2)}(\gamma_{022}P(-1 + p_{\lambda_0}^2) - p_{\lambda_0}(m_{\lambda_2} + P(\gamma_{222} - \gamma_{222}m_{\lambda_2}^2 + \gamma_{012}p_{\lambda_0}))))} \\
\gamma_{ME2} &= \frac{P(\gamma_{023} - \gamma_{023}p_{\lambda_0}^2 + p_{\lambda_0}(\gamma_{223}(-1 + m_{\lambda_2}^2) + \gamma_{013}p_{\lambda_0}))}{\gamma_{022}P(-1 + p_{\lambda_0}^2) - p_{\lambda_0}(m_{\lambda_2} + P(\gamma_{222} - \gamma_{222}m_{\lambda_2}^2 + \gamma_{012}p_{\lambda_0}))} \\
\beta_{QE1} &= -K_S^{(2)}A_{55}^{(2)}(K_S^{(0)}A_{55}^{(0)} - P)(\gamma_{ME1}m_{\lambda_2} + (\gamma_{221} - \gamma_{222}\gamma_{ME1})(1 + m_{\lambda_2}^2)P)p_{\lambda_0}\lambda_0 \\
\beta_{QE2} &= K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}(K_S^{(2)}A_{55}^{(2)} - P)P(\gamma_{021} + \gamma_{022}\gamma_{ME1} + (-\gamma_{011} + \gamma_{021} - \gamma_{012}\gamma_{ME1} + \gamma_{022}\gamma_{ME1})p_{\lambda_0}^2)\lambda_2 \\
\gamma_{QE1} &= K_S^{(2)}A_{55}^{(2)}B_{11}^{(2)}m_{\lambda_2}(K_S^{(0)}A_{55}^{(0)} - P)Pp_{\lambda_0}\lambda_0 + A_{11}^{(2)}(\beta_{QE1} + \beta_{QE2}) \\
\beta_{QE3} &= K_S^{(2)}A_{55}^{(2)}(K_S^{(0)}A_{55}^{(0)} - P)(\gamma_{ME2}m_{\lambda_2} + (\gamma_{223} - \gamma_{222}\gamma_{ME2})(1 + m_{\lambda_2}^2)P)p_{\lambda_0}\lambda_0 \\
\beta_{QE4} &= K_S^{(0)}A_{55}^{(0)}(K_S^{(2)}A_{55}^{(2)} - P)P(\gamma_{023} + \gamma_{022}\gamma_{ME2} + (-\gamma_{013} + \gamma_{023} + (-\gamma_{012} + \gamma_{022})\gamma_{ME2})p_{\lambda_0}^2)\lambda_2 \\
\gamma_{QE2} &= A_{11}^{(2)}(\beta_{QE3} - \beta_{QE4}) \quad (B.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_E &= \frac{\gamma_{QE1}}{\gamma_{QE2}}, & M_E^{(r)} &= \gamma_{ME1} + \gamma_{ME2}Q_E \\
C_{12} &= \frac{\gamma_{11}}{2} - \frac{M_E^{(r)}}{2P} + \gamma_{12}Q_E, & C_{11} &= \gamma_{11} - \frac{M_E^{(r)}}{P} + \frac{(2c + l_1 + l_2)Q_E}{P} - C_{12} \\
C_{02} &= \gamma_{021} + \gamma_{022}M_E^{(r)} + \gamma_{023}Q_E, & C_{01} &= \gamma_{011} + \gamma_{012}M_E^{(r)} + \gamma_{013}Q_E - C_{02}
\end{aligned}$$

$$C_{22} = \gamma_{221} - \gamma_{222}M_{\text{E}}^{(\text{r})} + \gamma_{223}Q_{\text{E}}, \quad C_{21} = \frac{B_{11}^{(2)}m_{\lambda 2}}{A_{11}^{(2)}} - \frac{m_{\lambda 2}M_{\text{E}}^{(\text{r})}}{P} - m_{\lambda 2}^2 C_{22} \quad (\text{B.7})$$

Literaturverzeichnis

- [Adams et al. 1986] ADAMS, R. D. ; ATKINS, R. W. ; HARRIS, J. A. ; KINLOCH, A. J.: Stress analysis and failure properties of carbon-fibre-reinforced-plastic/steel double-lap joints. In: *The Journal of Adhesion* 20 (1986), Nr. 1, 29–53.
- [Adams et al. 1997] ADAMS, R. D. ; COMYN, J. ; WAKE, W. C.: *Structural Adhesive Joints in Engineering*. Springer, 1997.
- [Adams u. Mallick 1993] ADAMS, R. D. ; MALLICK, V.: The effect of temperature on the strength of adhesively-bonded composite-aluminium joints. In: *The Journal of Adhesion* 43 (1993), Nr. 1-2, 17–33.
- [Akpınar 2013] AKPINAR, S.: Effects of laminate carbon/epoxy composite patches on the strength of double-strap adhesive joints: experimental and numerical analysis. In: *Materials & Design* 51 (2013), 501–512.
- [Allman 1977] ALLMAN, D. J.: A theory for elastic stresses in adhesive bonded lap joints. In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 30 (1977), Nr. 4, 415–436.
- [Anderson u. DeVries 1987] ANDERSON, G. P. ; DEVRIES, K. L.: Predicting bond strength. In: *The Journal of Adhesion* 23 (1987), Nr. 4, 289–302.
- [Anderson u. DeVries 1989] ANDERSON, G. P. ; DEVRIES, K. L.: Predicting strength of adhesive joints from test results. In: *International Journal of Fracture* 39 (1989), Nr. 1, 191–200.
- [Anyfantis u. Tsouvalis 2012] ANYFANTIS, K. N. ; TSOUVALIS, N. G.: Experimental parametric study of single-lap adhesive joints between dissimilar materials. In: *Proceedings of the ECCM15–15th European Conference on Composite Materials, Venice, Italy, 2012*, 24–28.
- [Apalak et al. 2006] APALAK, Z. G. ; APALAK, M. K. ; GENÇ, M. S.: Progressive damage modeling of an adhesively bonded unidirectional composite single-lap joint in tension at the mesoscale level. In: *Journal of Thermoplastic Composite Materials* 19 (2006), Nr. 6, 671–702.
- [Apalak u. Engin 2004] APALAK, M. K. ; ENGİN, A.: Effect of adhesive free-end geometry on the initiation and propagation of damaged zones in adhesively bonded lap joints. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 18 (2004), Nr. 5, 529–559.
- [ASTM] ; ASTM International, West Conshohocken, PA, 2012: *ASTM D5573-99(2012), Standard practice for classifying failure modes in fiber-reinforced-plastic (frp) joints*. www.astm.org
- [Avila u. Bueno 2004] AVILA, A. F. ; BUENO, P. d. O.: An experimental and numerical study on adhesive joints for composites. In: *Composite Structures* 64 (2004), Nr. 3, 531–537.
- [Aymerich et al. 2005] AYMERICH, F. ; ONNIS, R. ; PRIOLO, P.: Analysis of the fracture behaviour of a stitched single-lap joint. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 36 (2005), Nr. 5, 603–614.

- [Bak et al. 2016] BAK, K. M. ; KALAICHELVAN, K. ; JOTHILINGAM, A. ; RAJENDRABOOPATHY, S.: Acoustic emission characterization of failure modes of single-lap joints in glass/epoxy specimens. In: *Journal of Composite Materials* 50 (2016), Nr. 1, 3–23.
- [Banea u. da Silva 2009] BANEAL, M. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Adhesively bonded joints in composite materials: an overview. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials Design and Applications* 223 (2009), Nr. 1, 1–18.
- [Becker u. Gross 2002] BECKER, W. ; GROSS, D.: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Springer, 2002.
- [Benzeggagh u. Kenane 1996] BENZEGGAGH, M. L. ; KENANE, M.: Measurement of mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites with mixed-mode bending apparatus. In: *Composites Science and Technology* 56 (1996), Nr. 4, 439–449.
- [Bigwood u. Crocombe 1989] BIGWOOD, D. A. ; CROCOMBE, A. D.: Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 9 (1989), Nr. 4, 229–242.
- [Broberg 1999] BROBERG, K. B.: *Cracks and Fracture*. Elsevier, 1999.
- [Buchholz 1984] BUCHHOLZ, F. G.: Improved formulae for the finite element calculation of the strain energy release rate by the modified crack closure integral method. In: *Accurate Reliability and Training in FEM Technology* (1984), 650–659.
- [Budhe et al. 2017] BUDHE, S. ; BANEAL, M. D. ; DE BARROS, S. ; DA SILVA, L. F. M.: An updated review of adhesively bonded joints in composite materials. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 72 (2017), 30–42.
- [Campilho et al. 2005] CAMPILHO, R. D. S. G. ; DE MOURA, M. F. S. F. ; DOMINGUES, J. J. M. S.: Modelling single and double-lap repairs on composite materials. In: *Composites Science and Technology* 65 (2005), Nr. 13, 1948–1958.
- [Campilho et al. 2008] CAMPILHO, R. D. S. G. ; DE MOURA, M. F. S. F. ; DOMINGUES, J. J. M. S.: Using a cohesive damage model to predict the tensile behaviour of cfrp single-strap repairs. In: *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008), Nr. 5, 1497–1512.
- [Campilho et al. 2011a] CAMPILHO, R. D. S. G. ; BANEAL, M. D. ; CHAVES, F. J. P. ; DA SILVA, L. F. M.: eXtended Finite Element Method for fracture characterization of adhesive joints in pure mode I. In: *Computational Materials Science* 50 (2011), Nr. 4, 1543–1549.
- [Campilho et al. 2011b] CAMPILHO, R. D. S. G. ; BANEAL, M. D. ; PINTO, A. M. G. ; DA SILVA, L. F. M. ; DE JESUS, A. M. P.: Strength prediction of single- and double-lap joints by standard and eXtended finite element modelling. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 31 (2011), Nr. 5, 363–372.
- [Campilho et al. 2011c] CAMPILHO, R. D. S. G. ; BANEAL, M. D. ; PINTO, A. M. G. ; DA SILVA, L. F. M. ; DE JESUS, A. M. P.: Strength prediction of single- and double-lap joints by standard and eXtended finite element modelling. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 31 (2011), Nr. 5, 363–372.

- [Campilho et al. 2013] CAMPILHO, R. D. S. G. ; BANEÁ, M. D. ; NETO, J. A. B. P. ; DA SILVA, L. F. M.: Modelling adhesive joints with cohesive zone models: effect of the cohesive law shape of the adhesive layer. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 44 (2013), 48–56.
- [Carpinteri et al. 2009] CARPINTERI, A. ; CORNETTI, P. ; PUGNO, N.: Edge debonding in frp strengthened beams: Stress versus energy failure criteria. In: *Engineering Structures* 31 (2009), Nr. 10, 2436–2447.
- [Carrere et al. 2015] CARRERE, N. ; MARTIN, E. ; LEGUILLON, D.: Comparison between models based on a coupled criterion for the prediction of the failure of adhesively bonded joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 138 (2015), 185–201.
- [Chang et al. 2006] CHANG, P. ; MOURITZ, A. P. ; COX, B. N.: Properties and failure mechanisms of pinned composite lap joints in monotonic and cyclic tension. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 13, 2163–2176.
- [Charalambides et al. 1997] CHARALAMBIDES, M. N. ; KINLOCH, A. J. ; MATTHEWS, F. L.: Strength prediction of bonded joints. In: *Proceedings of AGARD Conference on Bolted/Bonded Joints in Polymeric Composites* DTIC Document, 1997
- [Cheng et al. 1991] CHENG, S. ; CHEN, D. ; SHI, Y.: Analysis of adhesive-bonded joints with nonidentical adherends. In: *Journal of Engineering Mechanics* 117 (1991), Nr. 3, 605–623.
- [Cheuk u. Tong 2002] CHEUK, P. T. ; TONG, L.: Failure of adhesive bonded composite lap shear joints with embedded precrack. In: *Composites Science and Technology* 62 (2002), Nr. 7, 1079–1095.
- [Clark u. McGregor 1993] CLARK, J. D. ; MCGREGOR, I. J.: Ultimate tensile stress over a zone: a new failure criterion for adhesive joints. In: *The Journal of Adhesion* 42 (1993), Nr. 4, 227–245
- [Cornetti et al. 2006] CORNETTI, P. ; PUGNO, N. ; CARPINTERI, A. ; TAYLOR, D.: Finite fracture mechanics: a coupled stress and energy failure criterion. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 14, 2021–2033.
- [Cornetti et al. 2012] CORNETTI, P. ; MANTIČ, V. ; CARPINTERI, A.: Finite Fracture Mechanics at elastic interfaces. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 7, 1022–1032.
- [Cuntze 2006] CUNTZE, R. G.: Efficient 3D and 2D failure conditions for UD laminae and their application within the verification of the laminate design. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 7, 1081–1096.
- [Cuntze 2012] CUNTZE, R. G.: The predictive capability of failure mode concept-based strength conditions for laminates composed of unidirectional laminae under static triaxial stress states. In: *Journal of Composite Materials* 46 (2012), Nr. 19-20, 2563–2594.
- [da Silva u. Adams 2007] DA SILVA, L. F. M. ; ADAMS, R. D.: Techniques to reduce the peel stresses in adhesive joints with composites. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 27 (2007), Nr. 3, 227–235.
- [da Silva u. Campilho 2012] DA SILVA, L. F. M. ; CAMPILHO, R. D. S. G.: *Advances in Numerical Modelling of Adhesive Joints*. Springer, 2012

- [Dassault Systemes] DASSAULT SYSTEMES: *ABAQUS Users Manual 6.16*.
- [Dattaguru et al. 1984] DATTAGURU, B. ; EVERETT JR, R. A. ; WHITCOMB, J. D. ; JOHNSON, W. S.: Geometrically nonlinear analysis of adhesively bonded joints. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 106 (1984), 59–65.
- [Davies et al. 1992] DAVIES, P. ; KAUSCH, H. H. ; WILLIAMS, J. G. ; KINLOCH, A. J. ; CHARALAMBIDES, M. N. ; PAVAN, A. ; MOORE, D. R. ; PREDIGER, R. ; ROBINSON, I. ; BURGOYNE, N. ; FRIEDRICH, K. ; WITTICH, H. ; REBELO, C. A. ; TORRES MARQUES, A. ; RAMSTEINER, F. ; MELVE, B. ; FISCHER, M. ; ROUX, N. ; MARTIN, D. ; CZARNOCKI, P. ; NEVILLE, D. ; VERPOEST, I. ; GOFFAUX, B. ; LEE, R. ; WALLS, K. ; TRIGWELL, N. ; PARTRIDGE, I. K. ; JAUSSAUD, J. ; ANDERSEN, S. ; GIRAUD, Y. ; HALE, G. ; MCGRATH, G.: Round-robin interlaminar fracture testing of carbon-fibre-reinforced epoxy and PEEK composites. In: *Composites Science and Technology* 43 (1992), Nr. 2, 129–136.
- [Delale et al. 1981] DELALE, F. ; ERDOGAN, F. ; AYDINOGLU, M. N.: Stresses in adhesively bonded joints: a closed-form solution. In: *Journal of Composite Materials* 15 (1981), Nr. 3, 249–271.
- [Engelstad u. Actis 2003] ENGELSTAD, S. P. ; ACTIS, R. L.: Development of p-version handbook solutions for analysis of composite bonded joints. In: *Computers & Mathematics with Applications* 46 (2003), Nr. 1, 81–94.
- [ETAG] ; European Organisation for Technical Approvals: *ETAG 002. Guideline for European Technical Approval for Structural Sealant Glazing Kits. (2012)* www.eota.eu
- [Felger et al. 2014] FELGER, J. ; WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: Effect of unsupported adherend length on failure load of single lap joints. In: *Proceedings of the European Adhesion Conference*, 2014, 219–222.
- [Fernandes et al. 2015] FERNANDES, T. A. B. ; CAMPILHO, R. D. S. G. ; BANEJA, M. D. ; DA SILVA, L. F. M.: Adhesive selection for single lap bonded joints: Experimentation and advanced techniques for strength prediction. In: *The Journal of Adhesion* 91 (2015), Nr. 10–11, 841–862.
- [Fernlund et al. 1994] FERNLUND, G. ; PAPINI, M. ; MCCAMMOND, D. ; SPELT, J. K.: Fracture load predictions for adhesive joints. In: *Composites Science and Technology* 51 (1994), Nr. 4, 587–600.
- [Fernlund u. Spelt 1991] FERNLUND, G. ; SPELT, J. K.: Failure load prediction of structural adhesive joints: Part 2: Experimental study. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 11 (1991), Nr. 4, 221–227.
- [Frostig et al. 1999] FROSTIG, Y. ; THOMSEN, O. T. ; MORTENSEN, F.: Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet-high-order theory approach. In: *Journal of Engineering Mechanics* 125 (1999), Nr. 11, 1298–1307.
- [García u. Leguillon 2012] GARCÍA, I. G. ; LEGUILLON, D.: Mixed-mode crack initiation at a v-notch in presence of an adhesive joint. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 15–16, 2138–2149.
- [Glaessgen et al. 2002] GLAESSGEN, E. H. ; RAJU, I. S. ; POE JR, C. C.: Analytical and experimental studies of the debonding of stitched and unstitched composite joints. In: *Journal of Composite Materials* 36 (2002), Nr. 23, 2599–2622.

- [Gonçalves et al. 2000] GONÇALVES, J. P. M. ; DE MOURA, M. F. S. F. ; DE CASTRO, P. M. S. T. ; MARQUES, A. T.: Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation. In: *Engineering Computations* 17 (2000), Nr. 1, 28–47.
- [Goglio et al. 2008] GOGGIO, L. ; ROSSETTO, M. ; DRAGONI, E.: Design of adhesive joints based on peak elastic stresses. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 28 (2008), Nr. 8, 427–435.
- [Goland 1944] GOLAND, M. ; REISSNER, E.: The Stresses in Cemented Joints. In: *Journal of Applied Mechanics* 66 (1944), 17–27.
- [Griffith u. Eng 1921] GRIFFITH, A. A. ; ENG, M.: VI. The phenomena of rupture and flow in solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* 221 (1921), 163–198.
- [Grimes et al. 1972] GRIMES, G. C. ; GREIMANN, L. F. ; WAH, T. ; COMMERFORD, G. E. ; BLACKSTONE, W. R. ; WOLFE, G. K.: The development of nonlinear analysis methods for bonded joints in advanced filamentary composite structures. In: *DTIC Technical Report* (1972).
- [Gross 2006] GROSS, D. ; SEELIG, Th.: *Bruchmechanik: mit einer Einführung in die Mikro-mechanik*. Springer, 2006.
- [Guo et al. 2006] GUO, S. ; DILLARD, D. A. ; PLAUT, R. H.: Effect of boundary conditions and spacers on single-lap joints loaded in tension or compression. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 26 (2006), Nr. 8, 629–638.
- [Harper u. Hallett 2008] HARPER, P. W. ; HALLETT, S. R.: Cohesive zone length in numerical simulations of composite delamination. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), Nr. 16, 4774–4792.
- [Harris u. Adams 1984] HARRIS, J. A. ; ADAMS, R. A.: Strength prediction of bonded single lap joints by non-linear finite element methods. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 4 (1984), Nr. 2, 65–78.
- [Hart-Smith 1973a] HART-SMITH, L.J.: Adhesive-bonded double-lap joints. In: *NASA Technical Report* (1973).
- [Hart-Smith 1973b] HART-SMITH, L.J.: Adhesive-bonded single-lap joints. In: *NASA Technical Report* (1973).
- [Haruna et al. 1996] HARUNA, K. ; HAMADA, H. ; MAEKAWA, Z.-I.: Strength prediction of adhesively bonded carbon/epoxy joints. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 10 (1996), Nr. 10, 1089–1104.
- [Hashin 1996] HASHIN, Z.: Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (1996), Nr. 7, 1129–1145.
- [Hashin 1980] HASHIN, Z.: Failure criteria for unidirectional fiber composites. In: *Journal of Applied Mechanics* 47 (1980), Nr. 2, 329–334.
- [Hebel 2010] HEBEL, J.: *Modellierung spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen mit der Bruchmechanik finiter Risse*. Bd. 22. Techn. Univ., Studienbereich Mechanik, 2010

- [Hebel u. Becker 2008] HEBEL, J. ; BECKER, W.: Numerical analysis of brittle crack initiation at stress concentrations in composites. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 15 (2008), Nr. 6-7, 410–420.
- [Hebel et al. 2010] HEBEL, J. ; DIERINGER, R. ; BECKER, W.: Modelling brittle crack formation at geometrical and material discontinuities using a finite fracture mechanics approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), Nr. 18, 3558–3572.
- [Hell et al. 2014] HELL, S. ; WEISSGRAEBER, P. ; FELGER, J. ; BECKER, W.: A coupled stress and energy criterion for the assessment of crack initiation in single lap joints: a numerical approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 117 (2014), 112–126.
- [Henninger u. Leguillon 2007] HENNINGER, C. ; LEGUILLON, D.: Adhesive fracture of an epoxy joint under thermal and mechanical loadings. In: *Journal of Thermal Stresses* 31 (2007), Nr. 1, 59–76.
- [Huang et al. 2002] HUANG, H. ; YANG, C. ; TOMBLIN, J. S. ; HARTER, P.: Stress and failure analyses of adhesive-bonded composite joints using ASTM D3165 specimens. In: *Journal of Composites Technology & Research* 24 (2002), Nr. 2, 345–356.
- [Hutchinson u. Suo 1991] HUTCHINSON, J. W. ; SUO, Z.: Mixed mode cracking in layered materials. In: *Advances in Applied Mechanics* 29 (1991), 63–191.
- [Hühne et al. 2010] HÜHNE, C. ; ZERBST, A.-K. ; KUHLMANN, G. ; STEENBOCK, C. ; ROLFES, R.: Progressive damage analysis of composite bolted joints with liquid shim layers using constant and continuous degradation models. In: *Composite Structures* 92 (2010), Nr. 2, 189–200.
- [Mathematica] *Mathematica, Version 11.3.* – Champaign, IL, 2018
- [Irwin 1957] IRWIN, G. R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. In: *Journal of Applied Mechanics* E24 (1957), 351–369.
- [Jiang et al. 2015] JIANG, Z. ; WAN, S. ; ZHONG, Z. ; LI, M.: Geometrically nonlinear analysis for unbalanced adhesively bonded single-lap joint based on flexible interface theory. In: *Archive of Applied Mechanics* 7 (2015), 1–22.
- [John et al. 1991] JOHN, S. J. ; KINLOCH, A. J. ; MATTHEWS, F. L.: Measuring and predicting the durability of bonded carbon fibre/epoxy composite joints. In: *Composites* 22 (1991), Nr. 2, 121–127.
- [Kafkalidis u. Thouless 2002] KAFKALIDIS, M. S. ; THOULESS, M. D.: The effects of geometry and material properties on the fracture of single lap-shear joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), Nr. 17, 4367–4383.
- [Kairouz u. Matthews 1993] KAIROUZ, K. C. ; MATTHEWS, F. L.: Strength and failure modes of bonded single lap joints between cross-ply adherends. In: *Composites* 24 (1993), Nr. 6, 475–484.
- [Keller u. Vallée 2005] KELLER, T. ; VALLÉE, T.: Adhesively bonded lap joints from pultruded GFRP profiles. Part I: stress–strain analysis and failure modes. In: *Composites Part B: Engineering* 36 (2005), Nr. 4, 331–340.
- [Kelly 2006] KELLY, G.: Quasi-static strength and fatigue life of hybrid (bonded/bolted) composite single-lap joints. In: *Composite Structures* 72 (2006), Nr. 1, 119–129.

- [Kim et al. 2008] KIM, K.-S. ; YI, Y.-M. ; CHO, G.-R. ; KIM, C.-G.: Failure prediction and strength improvement of uni-directional composite single lap bonded joints. In: *Composite Structures* 82 (2008), Nr. 4, 513–520.
- [Kim et al. 2006] KIM, K.-S. ; YOO, J.-S. ; YI, Y.-M. ; KIM, C.-G.: Failure mode and strength of uni-directional composite single lap bonded joints with different bonding methods. In: *Composite Structures* 72 (2006), Nr. 4, 477–485.
- [Kim u. Lee 2008] KIM, W. S. ; LEE, J. J.: Interfacial fracture analysis of adhesive-bonded joints. In: *Advanced Materials Research* Bd. 33 Trans Tech Publ, (2008), 327–332.
- [Klarmann u. Schweizerhof 1993] KLARMANN, R. ; SCHWEIZERHOF, K.: A Priori Verbesserung von Schubkorrekturfaktoren zur Berechnung von geschichteten anisotropen Schalentragwerken. In: *Archive of Applied Mechanics* 63 (1993), Nr. 2, 73–85.
- [Krenk 1992] KRENK, S.: Energy release rate of symmetric adhesive joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 43 (1992), Nr. 4, 549–559.
- [Krueger 2004] KRUEGER, R.: Virtual crack closure technique: history, approach, and applications. In: *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), Nr. 2, 109–143.
- [Krueger et al. 2003] KRUEGER, R. ; MINGUET, P. J. ; O BRIEN, T. K.: Implementation of interlaminar fracture mechanics in design: an overview. In: *Technical Papers-Society of Manufacturing Engineers - presented at the 14th International Conference on Composite Materials* (2003).
- [Kuna 2013] KUNA, M.: *Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory - Numerics - Applications*. Springer Netherlands, 2013.
- [Lai et al. 1996] LAI, Y.-H. ; RAKESTRAW, M. D. ; DILLARD, D. A.: The cracked lap shear specimen revisited—a closed form solution. In: *International Journal of Solids and Structures* 33 (1996), Nr. 12, 1725–1743.
- [Laksimi et al. 1991] LAKSIMI, A. ; BENZEGGAGH, M. L. ; JING, G. ; HECINI, M. ; ROELANDT, J. M.: Mode I interlaminar fracture of symmetrical cross-ply composites. In: *Composites Science and Technology* 41 (1991), Nr. 2, 147–164.
- [Lee et al. 2009] LEE, H. K. ; PYO, S. ; KIM, B. R.: On joint strengths, peel stresses and failure modes in adhesively bonded double-strap and supported single-lap gfrp joints. In: *Composite Structures* 87 (2009), Nr. 1, 44–54.
- [Leguillon 1989] LEGUILLON, D.: Calcul du taux de restitution de l'énergie au voisinage d'une singularité. In: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'Univers, Sciences de la Terre* 309 (1989), Nr. 10, 945–950.
- [Leguillon 2002] LEGUILLON, D.: Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. In: *European Journal of Mechanics – A/Solids* 21 (2002), Nr. 1, 61–72.
- [Leguillon et al. 2003] LEGUILLON, D. ; LAURENCIN, J. ; DUPEUX, M.: Failure initiation in an epoxy joint between two steel plates. In: *European Journal of Mechanics – A/Solids* 22 (2003), Nr. 4, 509–524.
- [Lehman u. Hawley 1969] LEHMAN, G. M. ; HAWLEY, A. V.: Investigation of joints in advanced fibrous composites for aircraft structures. In: *DTIC Technical Report* (1969)

- [Lenci 2001] LENCI, S.: Analysis of a crack at a weak interface. In: *International Journal of Fracture* 108 (2001), Nr. 3, 275–290.
- [Li u. Lee-Sullivan 2001] LI, G. ; LEE-SULLIVAN, P.: Finite element and experimental studies on single-lap balanced joints in tension. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 21 (2001), Nr. 3, 211–220.
- [Li u. Lee-Sullivan 2006a] LI, G. ; LEE-SULLIVAN, P.: Re-visiting the beam models for adhesively bonded single-lap joints part II: Comparison of adhesive stress predictions. In: *Canadian Aeronautics and Space Journal* 52 (2006), Nr. 4, 149–171.
- [Li u. Lee-Sullivan 2006b] LI, G. ; LEE-SULLIVAN, P.: Re-visiting the beam models for adhesively bonded single-lap joints part I: Comparison of bending moment predictions. In: *Canadian Aeronautics and Space Journal* 52 (2006), Nr. 4, 149–171.
- [Li et al. 2015] LI, J. ; YAN, Y. ; ZHANG, T. ; LIANG, Z.: Experimental study of adhesively bonded cfrp joints subjected to tensile loads. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 57 (2015), Nr. 0, 95–104.
- [Liljedahl et al. 2006] LILJEDAHN, C. D. M. ; CROCOMBE, A. D. ; WAHAB, M. A. ; ASHCROFT, I. A.: Damage modelling of adhesively bonded joints. In: *International Journal of Fracture* 141 (2006), Nr. 1-2, 147–161.
- [Liu et al. 2014] LIU, Z. ; HUANG, Y. ; YIN, Z. ; BENNATI, S. ; VALVO, P. S.: A general solution for the two-dimensional stress analysis of balanced and unbalanced adhesively bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 54 (2014), Nr. 0, 112–123.
- [Luo u. Tong 2004] LUO, Q. ; TONG, L.: Linear and higher order displacement theories for adhesively bonded lap joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 41 (2004), Nr. 22, 6351–6381.
- [Luo u. Tong 2008] LUO, Q. ; TONG, L.: Analytical solutions for adhesive composite joints considering large deflection and transverse shear deformation in adherends. In: *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008), Nr. 22, 5914–5935.
- [Luo u. Tong 2009] LUO, Q. ; TONG, L.: Analytical solutions for nonlinear analysis of composite single-lap adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 2, 144–154.
- [Madhukar u. Drzal 1992] MADHUKAR, M. S. ; DRZAL, L. T.: Fiber-matrix adhesion and its effect on composite mechanical properties: IV. Mode I and mode II fracture toughness of graphite/epoxy composites. In: *Journal of Composite Materials* 26 (1992), Nr. 7, 936–968.
- [Mantič 2009] MANTIČ, V.: Interface crack onset at a circular cylindrical inclusion under a remote transverse tension. Application of a coupled stress and energy criterion. In: *International Journal of Solids and Structures* 46 (2009), Nr. 6, 1287 - 1304.
- [Mathews u. Swanson 2007] MATHEWS, M. J. ; SWANSON, S. R.: Characterization of the interlaminar fracture toughness of a laminated carbon/epoxy composite. In: *Composites Science and Technology* 67 (2007), Nr. 7, 1489–1498.
- [Matsuzaki et al. 2008a] MATSUZAKI, R. ; SHIBATA, M. ; TODOROKI, A.: Improving performance of gfrp/aluminum single lap joints using bolted/co-cured hybrid method. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 39 (2008), Nr. 2, 154–163.

- [Matsuzaki et al. 2008b] MATSUZAKI, R. ; SHIBATA, M. ; TODOROKI, A.: Reinforcing an aluminum/gfrp co-cured single lap joint using inter-adherend fiber. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 39 (2008), Nr. 5, 786–795.
- [Matthews et al. 1982] MATTHEWS, F. L. ; KILTY, P. F. ; GODWIN, E. W.: A review of the strength of joints in fibre-reinforced plastics. Part 2. Adhesively bonded joints. In: *Composites* 13 (1982), Nr. 1, 29–37.
- [Matthews u. Tester 1985] MATTHEWS, F. L. ; TESTER, T. T.: The influence of stacking sequence on the strength of bonded cfrp single lap joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 5 (1985), Nr. 1, 13–18.
- [Melograna u. Grenestedt 2002] MELOGRANA, J. D. ; GRENESTEDT, J. L.: Improving joints between composites and steel using perforations. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 33 (2002), Nr. 9, 1253–1261.
- [Mendoza-Navarro et al. 2013] MENDOZA-NAVARRO, L. E. ; DIAZ-DIAZ, A. ; CASTAÑEDA-BALDERAS, R. ; HUNKELER, S. ; NORET, R.: Interfacial failure in adhesive joints: Experiments and predictions. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 44 (2013), 36–47.
- [Mittal et al. 2015] MITTAL, A. ; DEB, A. ; CHOU, C.: A study into the mechanical behavior of adhesively-bonded jute fiber-reinforced composite. In: *SAE International Journal of Materials and Manufacturing* 8 (2015), 516–522.
- [Mittelstedt u. Becker 2017] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: *Strukturmechanik ebener Laminate*. Technische Universität Darmstadt FB Mechanik, Bibliothek, 2017
- [Moradi et al. 2013] MORADI, A. ; CARRÈRE, N. ; LEGUILLON, D. ; MARTIN, E. ; COGNARD, J.-Y.: Strength prediction of bonded assemblies using a coupled criterion under elastic assumptions: Effect of material and geometrical parameters. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 47 (2013), Nr. 0, 73–82.
- [de Morais u. de Moura 2006] DE MORAIS, A. B. ; DE MOURA, M. F. S. F.: Evaluation of initiation criteria used in interlaminar fracture tests. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 16, 2264–2276.
- [de Morais u. Pereira 2007] DE MORAIS, A. B. ; PEREIRA, A.: B. Application of the effective crack method to mode I and mode II interlaminar fracture of carbon/epoxy unidirectional laminates. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 38 (2007), Nr. 3, 785–794.
- [Mubashar et al. 2014] MUBASHAR, A. ; ASHCROFT, I. A. ; CROCOMBE, A. D.: Modelling damage and failure in adhesive joints using a combined XFEM-cohesive element methodology. In: *The Journal of Adhesion* 90 (2014), Nr. 8, 682–697.
- [Nairn 2000] NAIRN, J. A.: Matrix microcracking in composites. In: *Polymer Matrix Composites* 2 (2000), 403–432.
- [Neto et al. 2012] NETO, J. A. B. P. ; CAMPILHO, R. D. S. G. ; DA SILVA, L. F. M.: Parametric study of adhesive joints with composites. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 37 (2012), 96–101.

- [das Neves et al. 2009] DAS NEVES, P. J. C. ; DA SILVA, L. F. M. ; ADAMS, R. D.: Analysis of mixed adhesive bonded joints part I: theoretical formulation. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 23 (2009), Nr. 1, 1–34.
- [Nguyen et al. 2009] NGUYEN, K.-H. ; KWEON, J.-H. ; CHOI, J.-H.: Failure load prediction by damage zone method for single-lap bonded joints of carbon composite and aluminum. In: *Journal of Composite Materials* 43 (2009), 3031–3056.
- [O'Brien 1998] O'BRIEN, T.: Composite interlaminar shear fracture toughness, G_{IIc} : Shear measurement or sheer myth? In: *ASTM Special Technical Publication* 1330 (1998), 3–18.
- [Olmedo u. Santiuste 2012] OLMEDO Á. ; SANTIUSTE, C.: On the prediction of bolted single-lap composite joints. In: *Composite Structures* 94 (2012), Nr. 6, 2110–2117.
- [Oplinger 1991] OPLINGER, D. W.: A layered beam theory for single lap joints / DTIC DocumentOpl. In: *U.S. Army Materials Technology Laboratory Technical Report* (1991).
- [Ozel et al. 2014] OZEL, A. ; YAZICI, B. ; AKPINAR, S. ; AYDIN, M. D. ; TEMIZ, Ş.: A study on the strength of adhesively bonded joints with different adherends. In: *Composites Part B: Engineering* 62 (2014), 167–174.
- [Panigrahi 2013] PANIGRAHI, S. K.: Structural design of single lap joints with delaminated frp composite adherends. In: *Composites Part B: Engineering* 51 (2013), 112–120.
- [Panigrahi u. Pradhan 2007] PANIGRAHI, S. K. ; PRADHAN, B.: Three dimensional failure analysis and damage propagation behavior of adhesively bonded single lap joints in laminated frp composites. In: *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 26 (2007), Nr. 2, 183–201.
- [Panigrahi u. Pradhan 2008] PANIGRAHI, S. K. ; PRADHAN, B.: Onset and growth of adhesion failure and delamination induced damages in double lap joint of laminated frp composites. In: *Composite Structures* 85 (2008), Nr. 4, 326–336.
- [Parida u. Pradhan 2014] PARIDA, S. K. ; PRADHAN, A. K.: 3D finite element analysis of stress distributions and strain energy release rates for adhesive bonded flat composite lap shear joints having pre-existing delaminations. In: *Journal of Mechanical Science and Technology* 28 (2014), Nr. 2, 481–488.
- [Park et al. 2010] PARK, Y.-B. ; SONG, M.-G. ; KIM, J.-J. ; KWEON, J.-H. ; CHOI, J.-H.: Strength of carbon/epoxy composite single-lap bonded joints in various environmental conditions. In: *Composite Structures* 92 (2010), Nr. 9, 2173–2180.
- [Parker 1994] PARKER, B. M.: Adhesive bonding of fibre-reinforced composites. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 14 (1994), Nr. 2, 137–143.
- [Penado 1998] PENADO, F. E.: A Simplified Method for the Geometrically Nonlinear Analysis of the Single Lap Joint. In: *Journal of Thermoplastic Composite Materials* 11 (1998), Nr. 3, 272–287.
- [Pereira u. de Moraes 2004] PEREIRA, A. B. ; DE MORAIS, A. B.: Mode I interlaminar fracture of carbon/epoxy multidirectional laminates. In: *Composites Science and Technology* 64 (2004), Nr. 13–14, 2261–2270.

- [Pinto et al. 2014] PINTO, A. M. G. ; CAMPILHO, R. D. S. G. ; MENDES, I. R. ; BAPTISTA, A. P. M.: Numerical and experimental analysis of balanced and unbalanced adhesive single-lap joints between aluminium adherends. In: *The Journal of Adhesion* 90 (2014), Nr. 1, 89–103.
- [Pirondi u. Nicoletto 2008] PIRONDI, A. ; NICOLETTO, G.: Comportamento a frattura di un adesivo strutturale. In: *Convegno IGF XV Bari 2000*, 2008
- [Potter et al. 2001] POTTER, K. D. ; GUILD, F. J. ; HARVEY, H. J. ; WISNOM, M. R. ; ADAMS, R. D.: Understanding and control of adhesive crack propagation in bonded joints between carbon fibre composite adherends I. Experimental. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 21 (2001), Nr. 6, 435–443.
- [Puck u. Schürmann 1998] PUCK, A. ; SCHÜRMANN, H.: Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. In: *Composites Science and Technology* 58 (1998), Nr. 7, 1045–1067.
- [Puck 1996] PUCK, A.: *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis*. Hanser München, 1996
- [Purimpat et al. 2013] PURIMPAT, S. ; JÉRÔME, R. ; SHAHRAM, A.: Effect of fiber angle orientation on a laminated composite single-lap adhesive joint. In: *Advanced Composite Materials* 22 (2013), Nr. 3, 139–149.
- [Qin u. Dzenis 2001] QIN, M. ; DZENIS, Y. A.: Nonlinear numerical and experimental analysis of single lap adhesive composite joints with delaminated adherends. In: *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Composite Materials (ICCM13)*, 2001.
- [Qin u. Dzenis 2003] QIN, M. ; DZENIS, Y. A.: Analysis of single lap adhesive composite joints with delaminated adherends. In: *Composites Part B: Engineering* 34 (2003), Nr. 2, 167–173.
- [Quaresimin u. Ricotta 2006a] QUARESIMIN, M. ; RICOTTA, M.: Fatigue behaviour and damage evolution of single lap bonded joints in composite material. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 2, 176–187.
- [Quaresimin u. Ricotta 2006b] QUARESIMIN, M. ; RICOTTA, M.: Stress intensity factors and strain energy release rates in single lap bonded joints in composite materials. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 5, 647–656.
- [Rodríguez et al. 2012] RODRÍGUEZ, R. Q. ; DE PAIVA, W. P. ; SOLLERO, P. ; RICARDO, M. ; RODRIGUES, B. ; DE ALBUQUERQUE, É. L.: Failure criteria for adhesively bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 37 (2012), 26–36.
- [Radice u. Vinson 2008] RADICE, J. J. ; VINSON, J. R.: On the analysis of adhesively bonded structures: A high order semi-elastic adhesive layer model. In: *Composites Science and Technology* 68 (2008), Nr. 2, 376–386.
- [Rahman u. Sun 2014] RAHMAN, N. M. ; SUN, C. T.: Strength calculation of composite single lap joints with fiber-tear-failure. In: *Composites Part B: Engineering* 62 (2014), 249–255.
- [Reddy 2003] REDDY, J. N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. CRC, 2003
- [Reddy 2004] REDDY, J. N.: *Nonlinear Finite Element Analysis*. Oxford University Press, New York, 2004

- [Reeder 1993] REEDER, J. R.: A bilinear failure criterion for mixed-mode delamination. In: *Eleventh Volume: Composite Materials—Testing and Design*. ASTM International, 1993
- [Reedy Jr. 2000] REEDY JR., E. D.: Connection between interface corner and interfacial fracture analyses of an adhesively-bonded butt joint. In: *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000), Nr. 17, 2429–2442.
- [Reis et al. 2015] REIS, P. N. B. ; SOARES, J. R. L. ; PEREIRA, A. M. ; FERREIRA, J. A. M.: Effect of adherends and environment on static and transverse impact response of adhesive lap joints. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 80 (2015), 79–86.
- [Reja et al. 2014] REJA, M. M. ; TÁVARA, L. ; MANTIČ, V. ; CORNETTI, P.: Crack Onset and Propagation in Composite Materials Using Finite Fracture Mechanics on Elastic Interfaces. In: *Procedia Materials Science* 3 (2014), 1365–1370.
- [Renton u. Vinson 1975a] RENTON, W. J. ; VINSON, J. R.: On the behavior of bonded joints in composite material structures. In: *Engineering Fracture Mechanics* 7 (1975), Nr. 1, 41–60.
- [Renton u. Vinson 1973] RENTON, W. J. ; VINSON, J. R.: The analysis and design of composite material bonded joints under static and fatigue loadings In: *DTIC Technical Report* (1973).
- [Renton u. Vinson 1975b] RENTON, W. J. ; VINSON, J. R.: The efficient design of adhesive bonded joints. In: *The Journal of Adhesion* 7 (1975), Nr. 3, 175–193.
- [Renton u. Vinson 1977] RENTON, W. J. ; VINSON, J. R.: Analysis of adhesively bonded joints between panels of composite materials. In: *Journal of Applied Mechanics* 44 (1977), 101–106.
- [Rhee u. Chi 2001] RHEE, K. Y. ; CHI, C. H.: Determination of fracture toughness, G_c of graphite/epoxy composites from a cracked lap shear (CLS) specimen. In: *Journal of Composite Materials* 35 (2001), Nr. 1, 77–93.
- [Ribeiro et al. 2016] RIBEIRO, T. E. A. ; CAMPILHO, R. D. S. G. ; DA SILVA, L. F. M. ; GOGGIO, L.: Damage analysis of composite–aluminium adhesively-bonded single-lap joints. In: *Composite Structures* 136 (2016), 25–33.
- [Ribeiro-Ayeh u. Hallström 2003] RIBEIRO-AYEH, S. ; HALLSTRÖM, S.: Strength prediction of beams with bi-material butt-joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), Nr. 12, 1491–1507.
- [Rocha u. Campilho 2017] ROCHA, R. J. B. ; CAMPILHO, R. D. S. G.: Evaluation of different modelling conditions in the cohesive zone analysis of single-lap bonded joints. In: *The Journal of Adhesion* 94 (2017), Nr. 7, 562–582.
- [Rosendahl et al. 2016] ROSENDAHL, P. L. ; WEISSGRAEBER, P. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: A numerical finite fracture mechanics approach on asymmetric cracks in open-hole plates. In: *Procedia Structural Integrity* 2 (2016), 1991–1998.
- [Roy et al. 1997a] ROY, A. K. ; DONALDSON, S. L. ; SCHOEPPNER, G. A.: Bonded joints of unidirectional and cross-ply laminates: An experimental study. In: *38th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 1997, 1994–2003.

- [Roy et al. 1997b] ROY, A. ; MABRU, C. ; GACOUNOLLE, J. L. ; DAVIES, P.: Damage mechanisms in composite/composite bonded joints under static tensile loading. In: *Applied Composite Materials* 4 (1997), Nr. 2, 95–119.
- [Rybicki u. Kanninen 1977] RYBICKI, E. F. ; KANNINEN, M. F.: A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. In: *Engineering Fracture Mechanics* 9 (1977), Nr. 4, 931–938.
- [Rybicki et al. 1977] RYBICKI, E. F. ; SCHMUESER, D. W. ; FOX, J.: An energy release rate approach for stable crack growth in the free-edge delamination problem. In: *Journal of Composite Materials* 11 (1977), Nr. 4, 470–487.
- [Sadd 2009] SADD, M. H.: *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Academic Press, 2009.
- [Santosh u. Kiran 2012] SANTOSH, R. ; KIRAN, B.: Strength prediction of different orientation unidirectional glass fiber lap joints. In: *International Journal of Instrumentation, Control and Automation* 1 (2012), 63–67.
- [Seal Italy 2000] SEAL ITALY, LEGANO *Texipreg HS 160 REM*. (2000)
- [Schlimmer 1982] SCHLIMMER, M.: Anstrengungshypothese für Metallklebverbindungen. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 13 (1982), Nr. 6, 215–221.
- [Schürmann 2005] SCHÜRMANN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Springer, 2005.
- [Senthil et al. 2013] SENTHIL, K. ; AROCKIARAJAN, A. ; PALANINATHAN, R. ; SANTHOSH, B. ; USHA, K. M.: Defects in composite structures: Its effects and prediction methods – A comprehensive review. In: *Composite Structures* 106 (2013), 139–149.
- [Seong et al. 2008] SEONG, M.-S. ; KIM, T.-H. ; NGUYEN, K.-H. ; KWEON, J.-H. ; CHOI, J.-H.: A parametric study on the failure of bonded single-lap joints of carbon composite and aluminum. In: *Composite Structures* 86 (2008), Nr. 1, 135–145.
- [Sheppard 1996] SHEPPARD, A. T.: *The Failure Analysis of Adhesively Bonded Joints*, UNSW Sydney, 1996.
- [Sheppard et al. 1998] SHEPPARD, A. ; KELLY, D. ; TONG, L.: A damage zone model for the failure analysis of adhesively bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 18 (1998), Nr. 6, 385–400.
- [da Silva et al. 2009a] DA SILVA, L. F. M. ; DAS NEVES, P. J. C. ; ADAMS, R. D. ; SPELT, J. K.: Analytical models of adhesively bonded joints – Part I: Literature survey. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 3, 319–330.
- [da Silva et al. 2009b] DA SILVA, L. F. M. ; DAS NEVES, P. J. C. ; ADAMS, R. D. ; WANG, A. ; SPELT, J. K.: Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 3, 331–341.
- [da Silva et al. 2009c] DA SILVA, L. F. M. ; CARBAS, R. J. C. ; CRITCHLOW, G. W. ; FIGUEIREDO, M. A. V. ; BROWN, K.: Effect of material, geometry, surface treatment and environment on the shear strength of single lap joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 6, 621–632.

- [Silva u. Nunes 2014] SILVA, T. C. ; NUNES, L. C. S.: A new experimental approach for the estimation of bending moments in adhesively bonded single lap joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 54 (2014), Nr. 0, 13–20.
- [Song et al. 2010] SONG, M.-G. ; KWEON, J.-H. ; CHOI, J.-H. ; BYUN, J.-H. ; SONG, M.-H. ; SHIN, S.-J. ; LEE, T.-J.: Effect of manufacturing methods on the shear strength of composite single-lap bonded joints. In: *Composite Structures* 92 (2010), Nr. 9, 2194–2202.
- [Sørensen u. Kirkegaard 2006] SØRENSEN, B. F. ; KIRKEGAARD, P.: Determination of mixed mode cohesive laws. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 17, 2642–2661.
- [Sridharan 2008] SRIDHARAN, S.: *Delamination Behaviour of Composites*. Elsevier, 2008
- [Srinivas 1975] SRINIVAS, S.: Analysis of Bonded Joints.. In: *DTIC Technical Report* (1975).
- [Staudt 2018] STAUDT, Y.: *Proposal of a Failure Criterion of Adhesively Bonded Connections with Silicone*. Techn. Univ. Darmstadt, Fachbereich Bau- und Umweltingenieurwissenschaften, 2018
- [Staudt et al. 2016] STAUDT, Y. ; ODENBREIT, C. ; SCHNEIDER, J.: Investigation of bonded connections with silicone under shear loading. In: *Challenging Glass 5-Conference on Architectural and Structural Applications of Glass, Ghent*, 2016
- [Stein et al. 2015] STEIN, N. ; WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: A model for brittle failure in adhesive lap joints of arbitrary joint configuration. In: *Composite Structures* 133 (2015), 707–718.
- [Stewart 1997] STEWART, M. L.: An experimental investigation of composite bonded and/or bolted repairs using single lap joint designs. In: *Proceedings of the 1997, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Bd. 4, 1997, 2752–2760.
- [Stigh et al. 2010] STIGH, U. ; ALFREDSSON, K. S. ; ANDERSSON, T. ; BIEL, A. ; CARLBERGER, T. ; SALOMONSSON, K.: Some aspects of cohesive models and modelling with special application to strength of adhesive layers. In: *International Journal of Fracture* 165 (2010), Nr. 2, 149–162.
- [Tada et al. 2000] TADA, H. ; PARIS, P. C. ; IRWIN, G. R.: The stress analysis of cracks handbook. In: *American Society of Mechanical Engineers. Three-Park Avenue, New York, NY 10016* (2000)
- [Taib et al. 2006] TAIB, A. A. ; BOUKHILI, R. ; ACHIOU, S. ; GORDON, S. ; BOUKEHILI, H.: Bonded joints with composite adherends. Part I. Effect of specimen configuration, adhesive thickness, spew fillet and adherend stiffness on fracture. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 26 (2006), Nr. 4, 226–236.
- [Talmon l'Armée et al. 2016] TALMON L'ARMÉE, A. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: Bending moment calculation for single lap joints with composite laminate adherends including bending-extensional coupling. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 66 (2016), 41–52.
- [Talmon l'Armée et al. 2017] TALMON L'ARMÉE, A. ; HELL, S. ; ROSENDAHL, P. L. ; FELGER, J. ; BECKER, W.: Nonlinear crack opening integral: Mode mixity for finite cracks. In: *Engineering Fracture Mechanics* 186 (2017), 283–299.

- [Talmon l'Armée u. Becker 2018] TALMON L'ARMÉE, A. ; BECKER, W.: Coupled stress and energy criterion for composite failure in single lap adhesive joints. In: *Proceedings of the 7th International Symposium on Aircraft Materials* (2018).
- [Talmon l'Armée u. Becker 2018] TALMON L'ARMÉE, A. ; BECKER, W.: Coupled stress and energy criterion for composite failure: Pointwise versus averaged evaluation of the stress criterion. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures, In Vorbereitung*.
- [Taylor 2007] TAYLOR, D.: *The Theory of Critical Distances: a New Perspective in Fracture Mechanics*. Elsevier Science, 2007
- [Thomas et al. 1998] THOMAS, R. ; GARCIA, I. ; GUILD, F. J. ; ADAMS, R. D.: Adhesive joining of composite laminates. In: *Plastics Rubber and Composites Processing and Applications* 27 (1998), Nr. 4, 200–205.
- [Toftegaard u. Lystrup 2005] TOFTEGAARD, H. ; LYSTRUP, A.: Design and test of lightweight sandwich T-joint for naval ships. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 36 (2005), Nr. 8, 1055–1065.
- [Tomblin et al. 2002] TOMBLIN, J. ; HARTER, P. ; SENEVIRATNE, W. ; YANG, C.: Characterization of bondline thickness effects in adhesive joints. In: *Journal of Composites, Technology and Research* 24 (2002), Nr. 2, 80–92.
- [Tomblin et al. 2001] TOMBLIN, J. S. ; YANG, C. ; HARTER, P.: Investigation of thick bondline adhesive joints. In: *DTIC Technical Report* (2001).
- [Tong 1997] TONG, L.: An assessment of failure criteria to predict the strength of adhesively bonded composite double lap joints. In: *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 16 (1997), Nr. 8, 698–713.
- [Tong 1998] TONG, L.: Failure of adhesive-bonded composite single lap joints with embedded cracks. In: *AIAA Journal* 36 (1998), Nr. 3, 448–456.
- [Tong et al. 1998] TONG, L. ; JAIN, L. K. ; LEONG, K. H. ; KELLY, D. ; HERSZBERG, I.: Failure of transversely stitched RTM lap joints. In: *Composites Science and Technology* 58 (1998), Nr. 2, 221–227.
- [Turon et al. 2007] TURON, A. ; DÁVILA, C. G. ; CAMANHO, P. P. ; COSTA, J.: An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), Nr. 10, 1665–1682.
- [Vallée et al. 2006] VALLÉE, T. ; CORREIA, J. R. ; KELLER, T.: Probabilistic strength prediction for double lap joints composed of pultruded gfrp profiles part I: Experimental and numerical investigations. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 13, 1903–1914.
- [Venkayya u. Tischler 1997] VENKAYYA, V. B. ; TISCHLER, V. A.: A review of composite joint analysis programs. In: *Wright Lab, Bolted/Bonded Joints in Polymeric Composites* (SEE N 97- 21339 01-31) (1997).
- [Vijaya Kumar et al. 2013] VIJAYA KUMAR, R. L. ; BHAT, M. R. ; MURTHY, C. R. L.: Experimental analysis of composite single-lap joints using digital image correlation and comparison with theoretical models. In: *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 32 (2013), Nr. 23, 1858–1876.

- [Volkersen 1938] VOLKERSEN, O.: Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. In: *Luftfahrtforschung* 1 (1938), 41–47.
- [Wah 1973] WAH, T.: Stress distribution in a bonded anisotropic lap joint. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 95 (1973), 174–181.
- [Weißgraeber u. Becker 2013] WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: Finite Fracture Mechanics model for mixed mode fracture in adhesive joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013), Nr. 14, 2383–2394.
- [Weißgraeber 2014] WEISSGRAEBER, P.: *Neue Ansätze zur Analyse der Lastübertragung und Initiierung finiter Risse in Klebverbindungen*. Bd. 33. Studienbereich Mechanik, TU Darmstadt, 2014
- [Weißgraeber u. Becker 2011] WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: A new finite fracture mechanics approach for assessing the strength of bonded lap joints. In: *Key Engineering Materials* 471 (2011), 1075–1080.
- [Weißgraeber et al. 2015] WEISSGRAEBER, P. ; LEGUILLON, D. ; BECKER, W.: A review of finite fracture mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers. In: *Archive of Applied Mechanics* 86 (2015), 1–27.
- [Weißgraeber et al. 2016] WEISSGRAEBER, P. ; FELGER, J. ; GEIPEL, D. ; BECKER, W.: Cracks at elliptical holes: Stress intensity factor and finite fracture mechanics solution. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 55 (2016), 192–198.
- [Weißgraeber et al. 2014] WEISSGRAEBER, P. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: A general sandwich-type model for adhesive joints with composite adherends. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 55 (2014), 56–63.
- [Weißgraeber et al. 2015] WEISSGRAEBER, P. ; FELGER, J. ; TALMON L'ARMÉE, A. ; BECKER, W.: Crack initiation in single lap joints: effects of geometrical and material properties. In: *International Journal of Fracture* 192 (2015), 1–12.
- [Wu 1967] WU, E. M.: Application of fracture mechanics to anisotropic plates. In: *Journal of Applied Mechanics* 34 (1967), Nr. 4, 967–974.
- [Yahya u. Hashim 2014] YAHYA, N. A. ; HASHIM, S.: Stress analysis of steel/carbon composite double lap shear joints under tensile loading. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials Design and Applications* 1 (2014), 88–104.
- [Yang u. Pang 1993] YANG, C. ; PANG, S. S.: Stress-strain analysis of adhesive-bonded single-lap composite joints under cylindrical bending. In: *Composites Engineering* 3 (1993), Nr. 11, 1051–1063.
- [Yang u. Pang 1996] YANG, C. ; PANG, S.: Stress-strain analysis of single-lap composite joints under tension. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 118 (1996), Nr. 2, 247–255.
- [Yosibash et al. 2006] YOSIBASH, Z. ; PRIEL, E. ; LEGUILLON, D.: A failure criterion for brittle elastic materials under mixed-mode loading. In: *International Journal of Fracture* 141 (2006), Nr. 1, 291–312.

- [Yu et al. 2012] YU, T. ; FERNANDO, D. ; TENG, J. G. ; ZHAO, X. L.: Experimental study on cfrp-to-steel bonded interfaces. In: *Composites Part B: Engineering* 43 (2012), Nr. 5, 2279–2289.
- [Zeng u. Sun 2001] ZENG, Q.-G. ; SUN, C. T.: Novel design of a bonded lap joint. In: *AIAA Journal* 39 (2001), Nr. 10, 1991–1996.
- [Zhang et al. 2010] ZHANG, Y. ; VASSILOPOULOS, A. P. ; KELLER, T.: Mode I and II fracture behavior of adhesively-bonded pultruded composite joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), Nr. 1, 128–143.
- [Zhao u. Lu 2009] ZHAO, B. ; LU, Z.-H.: A two-dimensional approach of single-lap adhesive bonded joints. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 16 (2009), Nr. 2, 130–159.
- [Zhao et al. 2010] ZHAO, X. ; ADAMS, R. D. ; DA SILVA, L. F. M.: A new method for the determination of bending moments in single lap joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 30 (2010), Nr. 2, 63–71.
- [Zou et al. 2004] ZOU, G. P. ; SHAHIN, K. ; TAHERI, F.: An analytical solution for the analysis of symmetric composite adhesively bonded joints. In: *Composite Structures* 65 (2004), Nr. 3, 499–510.

Insgesamt 231 Referenzen.